9 класс

Задача 9.1. Разгон, торможение!

Как-то раз Пин сконструировал новый автомобиль и решил его испытать. В первый раз он, разогнавшись, тут же стал тормозить и остановился через время T после старта. Во второй раз Пин, разогнавшись, проехал какое-то время с постоянной скоростью, после чего затормозил и остановился. Оказалось, что оба раза Пин проехал одно и то же расстояние, но во втором заезде он потратил на $T/24$ больше времени, чем в первом. Определите, через какое время после старта во втором заезде он прекратил разгон и стал двигаться с постоянной скоростью. Разгон автомобиля Пина в обоих случаях происходит с одним и тем же постоянным ускорением, а модуль ускорения при торможении всегда в 4 раза больше, чем при разгоне.

Ответ: $0{,}6T$.

Решение: Рассмотрим первый заезд Пина. Пусть t_0 — время разгона, a — ускорение разгоняющегося автомобиля. Так как ускорение при торможении в четыре раза больше, а конечная скорость при разгоне равна начальной при торможении, время торможения автомобиля равно $t_0/4$. Поскольку общее время равно T, то $t_0 = 4T/5$. Длина всей дистанции, которую проезжает автомобиль, соответственно, равна

$$s = \frac{at_0^2}{2} + \frac{4a\cdot(t_0/4)^2}{2} = \frac{5at_0^2}{8} = \frac{2aT^2}{5}.$$

Рассмотрим теперь второй заезд. Пусть t — время разгона ($t < t_0$), а $t/4$ — время торможения. Длина дистанции не поменялась, а общее время в этот раз составляет $25T/24$. Таким образом, расстояние, которое Пин проехал с постоянной скоростью равно

$$s_1 = \frac{2aT^2}{5} - \frac{5at^2}{8},$$

а время проезда этого участка $t_1 = 25T/24 - 5t/4$. Так как скорость на этом участке равна $v_1 = at$, получим следующее соотношение:

$$s_1 = v_1t_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2aT^2}{5} - \frac{5at^2}{8} = at\cdot\left(\frac{25T}{24} - \frac{5t}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{5t^2}{8} - \frac{25Tt}{24} + \frac{2T^2}{5} = 0.$$

Решим это уравнение:

$$t = \left(\frac{5}{6} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{64}{25}}\right)T = \left(\frac{5}{6} \pm \frac{7}{30}\right)T.$$

Так как $t < t_0 = 4T/5$, берём меньший корень, и, следовательно, $t = 3T/5$.

Критерии:

1) Указано, что время разгона в 4 раза больше времени торможения . . . . 1 балл
2) Получена формула $s = 2aT^2/5$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записано верное выражение для s_1 . . . . 2 балла
4) Записано верное выражение для t_1 . . . . 2 балла
5) Получено уравнение, связывающее T и искомое время t . . . . 2 балла
6) Найдено, что $t = 3T/5$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) При наличии адекватного решения, альтернативного авторскому, необходимо разработать для него отдельные критерии, согласующиеся с общей концепцией, описанной выше.
2) Если учащийся получил **корректным**, но неавторским способом правильный ответ, у него должен стоять полный балл за задачу.
3) В пп. 3 и 4 не засчитывать тривиальные соотношения, вроде $s_1 = v_1t_1$.

Задача 9.2. Теплообмен в сосуде.
В теплоизолированный сосуд, где находится 46 г воды при температуре 60 ℃, помещают алюминиевый шарик, имеющий температуру 10 ℃. Из-за начавшегося теплообмена температура воды в начале эксперимента уменьшается со скоростью $\gamma_1 = 0{,}1$ ℃/с, а температура шарика (также в начале теплообмена) растёт со скоростью $\gamma_2 = 0{,}3$ ℃/с.
1. Определите массу алюминиевого шарика.
2. Определите температуру, которая установится в сосуде.
3. Каковы будут скорости изменения температуры воды и шарика тот в момент, когда температура воды упадёт до 50 ℃? Мощность теплообмена между водой и шариком пропорциональна текущей разности температур между ними.
Теплоёмкостью сосуда пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), удельная теплоёмкость алюминия — 920 Дж/(кг·℃).

Ответ: 1) 70 г; 2) 47,5 ℃; 3) 0,02 ℃/с и 0,06 ℃/с.

Решение: Так как сосуд теплоизолирован, то теплообмен происходит только между водой и алюминием. Соответственно, мощность теплоотвода от воды равна тепловой мощности передаваемой алюминию. Пусть за малое время $\Delta\tau$ температура изменяется (по модулю) со скоростью γ. Тогда тепловая мощность будет равна

$$N = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = cm\cdot\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = cm\gamma.$$

Отсюда, приравнивая мощность, отданную водой, и мощность переданную шарику, получим

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}\gamma_1 = c_{\text{ал}}m_{\text{ал}}\gamma_2 \quad\Rightarrow\quad m_{\text{ал}} = \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}\gamma_1}{c_{\text{ал}}\gamma_2} = \frac{4200\cdot 46\cdot 0{,}1}{920\cdot 0{,}3}\ \text{г} = 70\ \text{г}.$$

Чтобы найти установившуюся температуру t_0, запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}(60\,℃ - t_0) = c_{\text{ал}}m_{\text{ал}}(t_0 - 10\,℃) \quad\Rightarrow\quad \frac{60\,℃ - t_0}{\gamma_1} = \frac{t_0 - 10\,℃}{\gamma_2} \quad\Rightarrow\quad 3(60\,℃ - t_0) = t_0 - 10\,℃ \quad\Rightarrow\quad t_0 = 47{,}5\,℃.$$

Пусть температура воды стала 50 ℃. Найдём температуру шарика в этот момент, используя равенство количества отданной и полученной теплоты с начала теплообмена:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}(60\,℃ - 50\,℃) = c_{\text{ал}}m_{\text{ал}}(t_{\text{ал}} - 10\,℃) \quad\Rightarrow\quad 3(60\,℃ - 50\,℃) = t_{\text{ал}} - 10\,℃ \quad\Rightarrow\quad t_{\text{ал}} = 40\,℃.$$

Мощность теплоотдачи, по условию, пропорциональна разности температур. Сравним эти мощности, $N_{\text{нач}}$ и N_*, в начальный момент и в момент, когда температура воды равна 50 ℃ (k — некоторый коэффициент):

$$N_{\text{нач}} = k\cdot(60\,℃ - 10\,℃) = k\cdot 50\,℃, \qquad N_* = k\cdot(50\,℃ - 40\,℃) = k\cdot 10\,℃.$$

Они отличаются в 5 раз, следовательно скорости изменения температуры в этом случае будут также меньше в 5 раз:

$$\gamma_{1*} = \gamma_1/5 = 0{,}02\ ℃/\text{с}, \qquad \gamma_{2*} = \gamma_2/5 = 0{,}06\ ℃/\text{с}.$$

Критерии:
1) Записана формула $c_{\text{в}}m_{\text{в}}\gamma_1 = c_{\text{ал}}m_{\text{ал}}\gamma_2$ или аналог . . . . . . 2 балла
2) Найдено верное значение массы шарика . . . . . . 1 балл
3) Записано уравнение теплового баланса . . . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение установившейся температуры . . . . . . 1 балл
5) Правильно найдена температура шарика в момент, когда температура воды 50 ℃ . . . . . . 2 балла
6) Правильно найдено отношение мощностей теплоотдачи в начальный и в искомый моменты . . . . . 2 балла
7) Получено верное значение γ_{1*} . . . . . . 0,5 балла
8) Получено верное значение γ_{2*} . . . . . . 0,5 балла

Указание проверяющим:
Может оказаться, что учащийся считает зависимость температуры от времени линейной не только при малых $\Delta\tau$, но и во всём диапазоне вплоть до установления теплового равновесия. Это неверно! Хотя ответы в пп. 2,4,5 могут совпасть с правильными. В этом случае весь блок (пункты 1-5) оценивается максимум в 1 балл!

Задача 9.3. Меняем знак.

К источнику постоянного напряжения подключена схема (рис. 9.1), состоящая из трёх резисторов с постоянным сопротивлением, одного переменного резистора и электронного амперметра. Полярность подключения прибора и значения сопротивлений постоянных резисторов указаны на схеме. Когда сопротивление переменного резистора равно 21 Ом, амперметр показывает 70 мА.

1. Каково напряжение источника, подключённого к схеме?
2. При каком значении сопротивления переменного резистора амперметр покажет −70 мА?

Внутренним сопротивлением амперметра пренебречь.

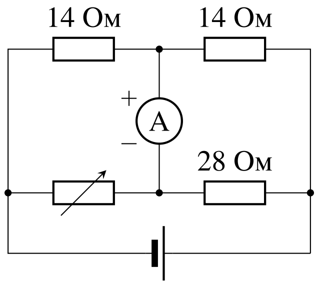

Рис. 9.1.

Ответ: 1) 18,62 В; 2) 40 Ом.

Решение: Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, верхний и нижний резисторы в каждой паре соединены параллельно, и напряжения на них равны.

В первом случае амперметр показывает положительное значение, следовательно ток через него течёт сверху вниз. Изобразим токи, текущие через резисторы (рис. 9.2а). Токи через резисторы 14 Ом и 28 Ом (правая пара) должны отличаться в 2 раза, поэтому мы обозначим их $2I$ и I соответственно. Через источник в этом случае течёт ток $3I$, а через резисторы в левой паре — $9I/5$ и $6I/5$. Это значит, что через амперметр течёт ток $I_A = I/5 = 0{,}07$ А, следовательно $I = 0{,}35$ А. Напряжение источника равно сумме напряжений на каждой паре резисторов:

$$U = 2I \cdot 14\ \text{Ом} + 9I/5 \cdot 14\ \text{Ом} = 19/5 \cdot 0{,}35\ \text{А} \cdot 14\ \text{Ом} = 18{,}62\ \text{В}.$$

Во втором случае сопротивление переменного резистора равно R_x, а ток через амперметр течёт снизу вверх. Снова изобразим токи, текущие через резисторы (рис. 9.2б). Заметим, что токи, текущие через источник и правую пару резисторов, изменились по сравнению с первым случаем ($I' \neq I$!!), хотя их отношение осталось прежним. Запишем выражение для общего напряжения в цепи и приравняем напряжению на источнике:

$$U = 2I' \cdot 14\ \text{Ом} + (2I' + I/5) \cdot 14\ \text{Ом} = (4I' + I/5) \cdot 14\ \text{Ом} \quad \Rightarrow \quad 19I/5 \cdot 14\ \text{Ом} = (4I' + I/5) \cdot 14\ \text{Ом} \quad \Rightarrow \quad I' = 0{,}9I.$$

Отсюда, приравнивая напряжения на переменном резисторе и параллельном с ним резисторе 14 Ом, найдём R_x:

$$(2I' + I/5) \cdot 14\ \text{Ом} = (I' - I/5)R_x \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{2I \cdot 14\ \text{Ом}}{0{,}7I} = 40\ \text{Ом}.$$

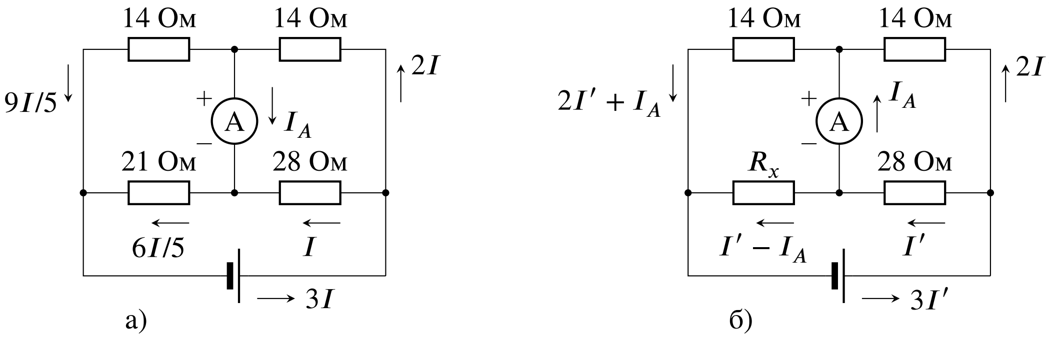

Рис. 9.2.

Критерии:

1) В первом случае токи через все резисторы выражены через один параметр . . . . 2 балла
2) Найдена связь между I_A и этим параметром . . . . 1 балл
3) Записано условие, связывающее напряжение источника, токи и сопротивления резисторов . . . . . . 1 балл
4) Найдено значение напряжения на источнике (18,62 В) . . . . 1 балл
5) Идея о том, что во 2м случае ток через амперметр имеет другое направление . . . . 1 балл
6) Правильно расставлены токи во втором случае . . . . 1 балл
7) Записано условие, связывающее напряжение источника, токи и сопротивления резисторов . . . . . 2 балла
8) Найдено верное значение R_x . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Пункты 1-3 критериев относятся к первому случаю (см. решение), а пп. 5-7 — ко второму.
2) Если учащийся нашёл числовые значения токов в пунктах 1 и 2, баллы за пп. 1 и 2 ставить.
3) Если на схеме во 2м случае ток через амперметр просто направлен вверх, а не вниз, балл за п.5 ставить.

Задача 9.4. Пружина в сообщающихся сосудах.

В сообщающихся сосудах с вертикальными стенками находится вода. Внутри левого сосуда находится подвешенный на лёгкой пружине металлический кубик, причём его нижнее основание касается поверхности воды (см. рис. 9.3). В тот же сосуд аккуратно налили 93 см^3 керосина, причём верхняя поверхность керосина оказалась вровень с верхней гранью кубика. Определите жёсткость пружины, если площадь поперечного сечения каждого сосуда равна 20 см^2, а ребро кубика имеет длину a = 3 см. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3, плотность металла больше плотностей обеих жидкостей. Керосин в правый сосуд не переливается и наружу не выливается. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

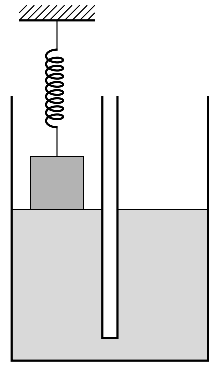

Рис. 9.3.

Ответ: 36 Н/м.

Решение: В результате наливания керосина в левый сосуд, кубик оказался полностью в него погружённым. Соответственно, на кубик дополнительно действует выталкивающая сила, сокращающая первоначальное растяжение пружины.

Пусть x — изменение длины пружины (по сравнению с начальным состоянием), k — её жёсткость, $h_к$ — высота слоя керосина, а $h_в$ — высота, на которую поднялся уровень воды в правом сосуде (рис. 9.4). Так как площади сосудов одинаковы, в левом сосуде уровень воды опустился также на $h_в$. Высота слоя керосина равна $h_к = x+a+h_в$. С другой стороны, из условия равенства давлений на уровне нижней границы керосина следует, что

$$\rho_к g h_к = \rho_в g \cdot 2h_в \quad \Rightarrow \quad h_в = \frac{\rho_к}{2\rho_в} \cdot h_к = 0{,}4h_к.$$

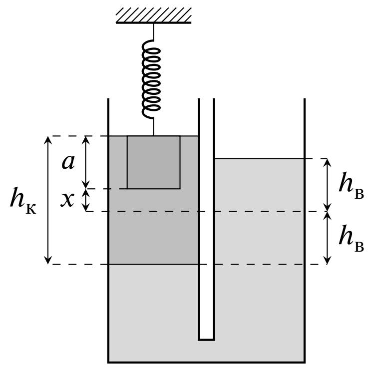

Рис. 9.4.

Объём керосина можно найти как $V_к = Sh_к - a^3$, откуда получим, что

$$h_к = \frac{V_к + a^3}{S} = \frac{120\ \text{см}^3}{20\ \text{см}^2} = 6\ \text{см} \quad \Rightarrow \quad h_в = 2{,}4\ \text{см}.$$

Отсюда следует, что

$$x + a + h_в = h_к \quad \Rightarrow \quad x = h_к - h_в - a = 6\ \text{см} - 2{,}4\ \text{см} - 3\ \text{см} = 0{,}6\ \text{см}.$$

Так как изменение силы упругости равно силе Архимеда, действующей на кубик,

$$kx = \rho_к g a^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\rho_к g a^3}{x} = \frac{800\ \text{кг/м}^3 \cdot 10\ \text{м/с}^2 \cdot 27 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3}{0{,}006\ \text{м}} = 36\ \text{Н/м}.$$

Критерии:

1) Записана верная связь между $V_к$, $h_к$, S и a . . . . 1 балл
2) Записана формула $h_к = x + a + h_в$ или аналог . . . . 1 балл
3) Правильно записано условие равенства давлений . . . . 2 балла
4) Записана формула $kx = \rho_к g a^3$ или аналог . . . . 2 балла
5) Получена верная формула для нахождения k, содержащая только известные величины . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение жёсткости пружины . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если найдено верное числовое значение $h_к$, балл за п. 1 ставить.

2) Если корректным методом найдено значение k (без итоговой формулы), баллы за п. 5 (и все предыдущие) ставятся автоматически.

Задача 9.5. Полутень на плетень.

Мяч радиуса r освещается источником света в форме шара с радиусом $2r$. Расстояние между центром источника и центром мяча равно $5r$. Определите радиус **полутени**, которую мяч отбрасывает на плоский экран, если тень от мяча является точкой. Прямая, проходящая через центры источника и мяча, перпендикулярна экрану.

Ответ: $5r$.

Решение: Так как тень мяча является точкой, общие внешние касательные, проведённые к источнику и мячу, пересекаются в точке O, лежащей в плоскости экрана (см. рис. 9.5). Из подобия $\triangle O_1AO$ и $\triangle O_2CO$ следует, что

$$\frac{O_1A}{O_2C} = \frac{O_1O}{O_2O} \quad\Rightarrow\quad \frac{2r}{r} = \frac{5r + O_2O}{O_2O} \quad\Rightarrow\quad O_2O = 5r.$$

Границы полутени определяются точками пересечения внутренних касательных и экрана. Найдём положение точки F — точки пересечения внутренних касательных между собой. Из подобия $\triangle O_1BF$ и $\triangle O_2DF$ следует, что

$$\frac{O_1B}{O_2D} = \frac{O_1F}{O_2F} \quad\Rightarrow\quad \frac{2r}{r} = \frac{5r - O_2F}{O_2F} \quad\Rightarrow\quad O_2F = \frac{5r}{3}.$$

Теперь, пользуясь подобием $\triangle O_2DF$ и $\triangle OFE$ получим радиус полутени OE:

$$\frac{OE}{O_2D} = \frac{OF}{FD} \quad\Rightarrow\quad \frac{OE}{r} = \frac{5r/3 + 5r}{\sqrt{(5r/3)^2 - r^2}} \quad\Rightarrow\quad OE = \frac{20r/3}{4r/3} \cdot r = 5r.$$

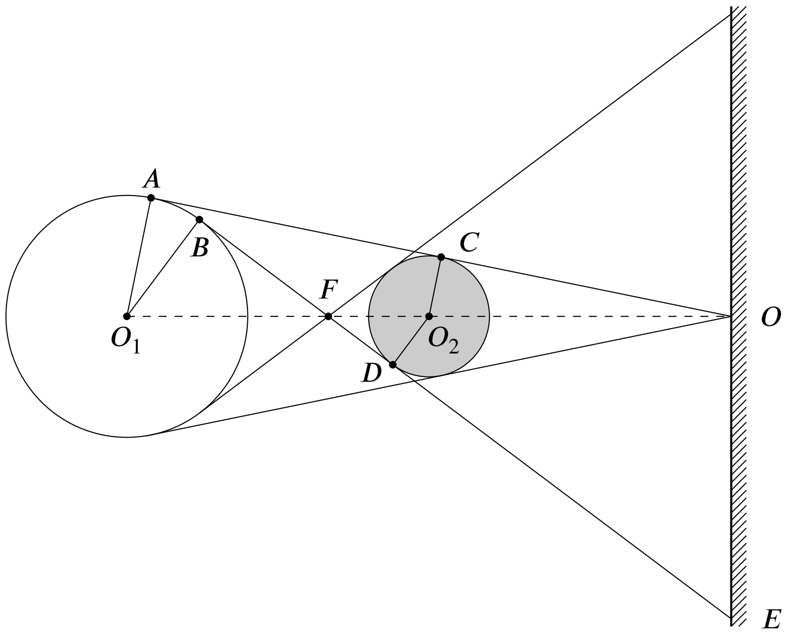

Рис. 9.5.

Критерии:

1) Указано, что экран проходит через точку пересечения внешних касательных . . . . 2 балла
2) Правильно найдено расстояние от центра мяча/источника до экрана . . . . 2 балла
3) Указано, что граница полутени задаётся точками пересечения экрана и внутренних касательных . . 2 балла
4) Правильно найдено положение точки F . . . . 2 балла
5) Получено верное значение радиуса полутени . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) В пунктах 1 и 3 достаточно корректно сделанного чертежа.
2) Если вместо касательных изображены прямые, проходящие через концы диаметров, параллельных экрану, чертёж считается некорректным, и баллы за соответствующий пункт/пункты не ставятся!
3) Если в п. 1 использован некорретный чертёж (см. выше), баллы за п. 2 и 5 не ставить. Аналогично, если в п. 3 использован некорретный чертёж, баллы за п. 4 и 5 не ставить.
4) Если при **корректном** решении учащийся не нашёл положение точки F, но нашём радиус полутени, баллы за п.4 ставить автоматически.

Максимально возможный балл в 9 классе 50