Возможные решения

Задача №9-Т1. Ускоряющее зеркало

Плоскость зеркала горизонтальна, поэтому источник света S и его изображение S^* всегда расположены на одной вертикальной прямой. Тогда, поскольку проекция скорости v_x источника на горизонтальную ось x остаётся постоянной, проекция скорости изображения на соответствующую ось $v_x^* = v_x$.

В связанной с зеркалом системе отсчёта ускорение источника равняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g} - \vec{a}.$$

В системе отсчёта зеркала траектории источника S и его изображения S^* симметричны относительно зеркала, значит для ускорения изображения источника относительно зеркала выполняется:

$$\vec{a}^*_{\text{отн}} = -\vec{a}_{\text{отн}}.$$

Для ускорения изображения источника в лабораторной системе отсчёта находим:

$$\vec{a}^* = \vec{a} + \vec{a}^*_{\text{отн}} = 2\vec{a} - \vec{g}.$$

Далее будем считать, что ускорение зеркала направлено вертикально вверх. Рассмотрим различные варианты определения ускорения.

Первый способ:

Рассмотрим траекторию источника между точками, расположенными на одной горизонтали. Между ними он движется в течение времени t, равного:

$$t = \frac{2v_{\text{в}}}{g},$$

где $v_{\text{в}}$ – вертикальная компонента скорости источника в указанных положениях. Тогда его горизонтальное перемещение за данное время равняется:

$$\Delta x = v_x t = \frac{2v_x v_{\text{в}}}{g}.$$

Аналогично рассматривая траекторию изображения источника между точками, расположенными на одной горизонтали, получим:

$$\Delta x^* = \frac{2v_x v_{\text{в}}^*}{g + 2a},$$

где $v_{\text{в}}^*$ – вертикальная компонента скорости изображения источника в указанных положениях. Здесь мы учли равенство $v_x^* = v_x$. Разделив уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x^*} = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{в}}^*}\left(1 + \frac{2a}{g}\right) \Rightarrow a = \frac{g}{2}\left(\frac{v_{\text{в}}^*}{v_{\text{в}}}\frac{\Delta x}{\Delta x^*} - 1\right)$$

Для улучшения точности рассмотрим максимально возможные значения Δx и Δx^*, которым соответствуют точки, расположенные на левом крае рисунка. Соответствующее отношение вертикальных компонент скоростей измерим как отношение угловых коэффициентов касательных. Получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x^*} = 0{,}865 \pm 0{,}010, \qquad \frac{v_{\text{в}}^*}{v_{\text{в}}} = \frac{k^*}{k} = 0{,}740 \pm 0{,}015 \Rightarrow a = -(1{,}76 \pm 0{,}10)\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом:

$a = (1{,}76 \pm 0{,}10)$ м/с^2, ускорение направлено вниз.

Второй способ:

Введём прямоугольную систему координат Oxy. Определим координаты вершин обеих траекторий, для этого проведём горизонтальные прямые и построим к ним серединные перпендикуляры. Координаты вершины для траектории источника (на рисунке обозначено точкой 1) определяются однозначно $x_{\text{в}} =$ 36 ус.единиц, $y_{\text{в}} = 18$ ус.единиц. Координаты вершины траектории изображения (точка 3) по оси ординаты определяются хуже, поэтому возьмём приближенное значение, таким образом $x_{\text{в}}^* = 45$ ус.единиц, $y_{\text{в}}^* \approx 21$ ус.единиц.

Рассмотрим движение источника света между точками 1 и 2. Между этими двумя точками источник двигался в течение времени t_1, тогда его горизонтальное и вертикальное перемещения:

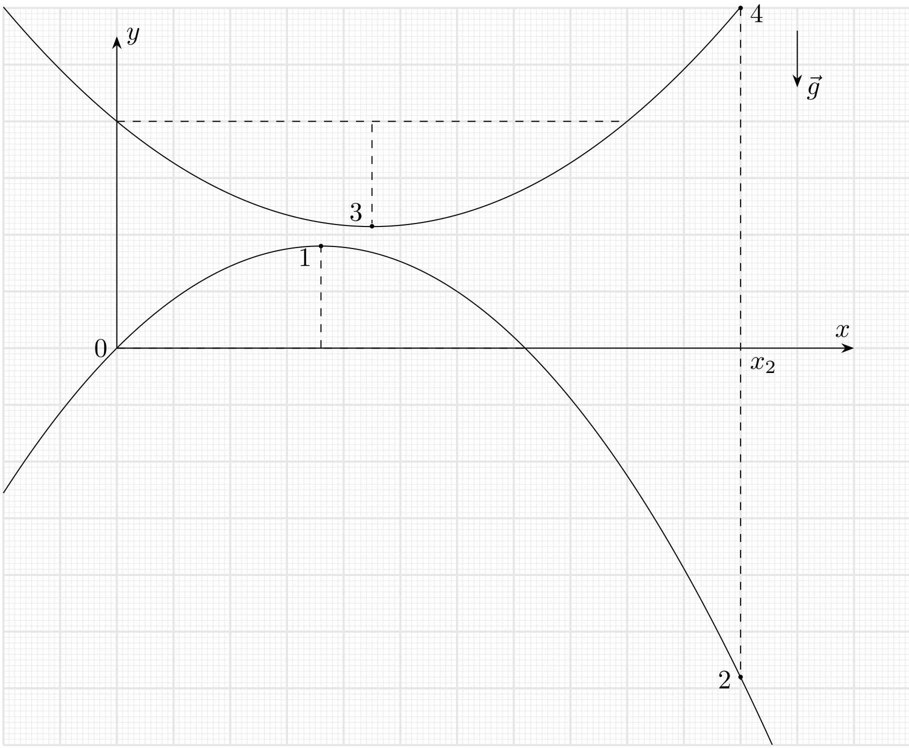
$$\Delta x = v_x t_1; \Delta y = \frac{g t_1^2}{2}.$$

Время движения из формулы для горизонтального перемещения: $t_1 = \Delta x / v_x$. Тогда:

$$g = \frac{2\Delta y}{t_1^2} = \frac{2\Delta y \cdot v_x^2}{\Delta x^2}.$$

Аналогично рассматривая траекторию изображения источника между точками 3 и 4, с учетом равенства горизонтальных проекций скоростей $v_x = v_x^*$, получим:

$$\Delta x^* = v_x^* t_2;\ \Delta y^* = \frac{(g+2a)t_2^2}{2};\ g + 2a = \frac{2\Delta y^*}{t_2^2} = \frac{2\Delta y^* \cdot v_x^2}{(\Delta x^*)^2}.$$



Разделим получившиеся выражения для ускорений друг на друга:

$$\frac{g+2a}{g} = \frac{\Delta y^* \cdot \Delta x^2}{\Delta y \cdot (\Delta x^*)^2} a = \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta y^* \cdot \Delta x^2}{\Delta y \cdot (\Delta x^*)^2} - 1\right).$$

Необходимые значения в условных единицах: $\Delta y^* = 39$, $\Delta x^* = 65$, $\Delta x = 74$ и $\Delta y = 76$ найдены с помощью масштабно-координатной сетки.

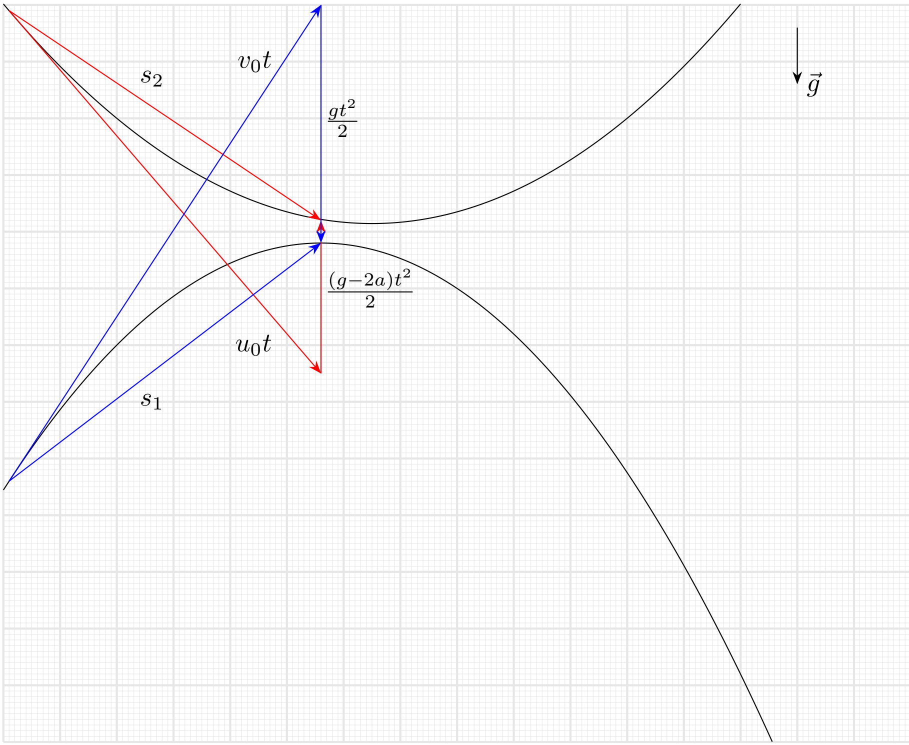
$$a = \frac{9{,}80}{2}\left(\frac{39 \cdot 74^2}{76 \cdot 65^2} - 1\right) = -1{,}64\ \text{м/с}^2.$$

Отличие от значения, полученного первым способом, обуславливается погрешностью определения координаты вершины траектории изображения источника.

$a = 1{,}64$ м/с^2, ускорение направлено вниз.

Третий способ:

Предположим, что ускорение зеркала направлено вниз. Проведём касательные к обеим траекториям в начальный момент времени и построим векторные треугольники перемещений для источника и его изображения. Для улучшения точности рассмотрим максимально возможные значения $\vec{v}_0 t$ и $\vec{u}_0 t$, где $\vec{v}_0$ и $\vec{u}_0$ скорости источника и его изображения. Векторные треугольники будем строить таким образом, чтобы горизонтальные перемещения источника и изображения были равны. Таким образом время t будет одинаковым для обоих случаев.



Тогда отношение полных ускорений будет равно отношению длин соответствующих сторон двух векторных треугольников перемещений:

$$\frac{g-2a}{g} = \frac{l_2}{l_1},$$

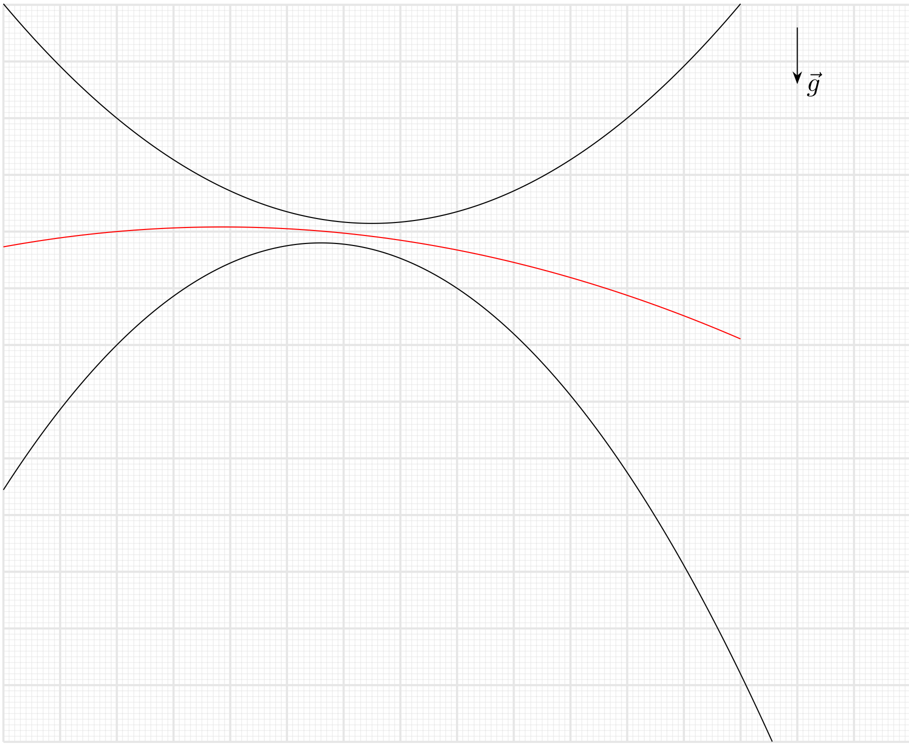
где l_1 это длина в условных единицах вертикальной стороны треугольника перемещений источника, а l_2 — вертикальной стороны треугольника перемещений изображения источника. Тогда:

$$a = \frac{g}{2}\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right) = \frac{9{,}80}{2}\left(1 - \frac{27}{42}\right) = 1{,}75\ \text{м/с}^2.$$

$a = 1{,}75$ м/с^2, ускорение направлено вниз.

Четвёртый способ:

В любой момент времени точка, принадлежащая плоскости зеркала, находится на середине вертикального отрезка, соединяющего точки, принадлежащие траекториям источника и изображения. Воспользовавшись этим, мы можем восстановить траекторию точки зеркала



Ускорение зеркала относительно земли равно $\vec{a}$. Из рисунка видно, что оно направлено вертикально вниз. Зная, что ускорение источника равно $\vec{g}$, и определив координаты вершин парабол, либо характерные расстояния по вертикали и горизонтали, мы можем найти величину ускорения, воспользовавшись любым из вышеописанных способов решения.

$a = (1{,}80 \pm 0{,}02)$ м/с^2, ускорение направлено вниз.

Задача №9-Т2. Мощная задача

Предположим, что диод закрыт.

Тогда через источник P_1 протекает электрический ток силой I_R. Из алгебраической суммы токов для центрального узла получим связь между токами, протекающими через источники:

$$I_3 = I_2 + I_R,$$

где I_2 и I_3 – силы электрических токов, протекающие через приборы P_2 и P_3 соответсвенно. Сумма напряжений на приборах P_1 и P_2 равна напряжению U_0:

$$U_0 = U_3 + U_2,$$

где U_2 и U_3 – напряжения на клеммах приборов P_2 и P_3 соответсвенно. Через второй прибор протекает электрический ток силой $I_2 > 1$ мА, иначе $U_2 + U_3 > U_0$. Тогда:

$$\frac{P_2}{I_2} + \frac{P_3}{I_2 + I_R} = U_0 \Rightarrow I_2 = 0{,}22 \text{ А}.$$

Получаем, что $I_3 > 1$ А, что противоречит условию. Значит мощность третьего источника меньше номинальной и сила тока через него равна 1 А. Сила тока через второй источник $I_2 = 0{,}2$ А. Ток через U_0 течет слева направо и равен $I_0 = 0{,}2$ А. С учётом ориентаций источников и направлений протеканий электрического тока, напряжение на ветви, содержащей U_0 и P_2, равно напряжению на ветви, содержащей P_1 и R:

$$U_0 - U_2 = -U_1 + U_R;\ U_0 - \frac{P_2}{I_2} = -\frac{P_1}{I_1} + I_R R \Rightarrow R \approx 4{,}1 \text{ Ом}.$$

Предположим, что диод открыт.

Тогда через него протекает электрический ток, а напряжения на источниках P_1 и P_2 равны. Пусть через первый источник протекает некоторый электрический ток силой I_1, тогда, так как номинальные мощности относятся как $P_2/P_1 = 2$, а напряжения на клеммах источников равны, через второй источник постоянной мощности будет протекать электрический ток силой $I_2 = 2I_1$. Алгебраическая сумма токов для узла, соединяющего все три источника, должна равняться нулю, из чего следует, что через прибор P_3 протекает электрический ток силой равной $I_3 = 2I_1 + I_1 = 3I_1$. Тогда:

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{U_3 I_3}{U_1 I_1} = 3; U_3 = \frac{3U_1 I_1}{3I_1} = U_1.$$

Получаем, что напряжения на клеммах всех трёх источников равны $U_3 = U_2 = U_1 = U$, следовательно $2U = U_0 \Rightarrow U = 0{,}5U_0 = 6$ В. Найдем чему равняется сила электрического тока, протекающего через первый источник:

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{1}{6} \text{ А}.$$

При таком значении I_1 все три прибора будут работать в нормальных режимах, обеспечивающих номинальную мощность. Алгебраическая сумма токов для нижнего узла должна равняться 0:

$$I_1 = I_D + I_R,$$

тогда I_D – сила тока через диод, получается отрицательной, что противоречит изначальному предположению. Получаем, что диод закрыт.

$I_1 = 0{,}8$ А, $I_2 = 0{,}2$ А, $I_3 = 1$ А, $I_0 = 0{,}2$ А, $R \approx 4{,}1$ Ом.

Задача №9-Т3. Нелинейная картина

1. **Первый способ.**

Пунктирная линия на диаграмме, разделяющая состояния "лёд" и "смесь воды и льда", соответствует льду при температуре плавления $0\,^\circ$C. Выведем уравнение данной линии. Количество теплоты, которое вода отдаёт при остывании до $0\,^\circ$C и кристаллизации: $Q_{\text{отд}} = 2cm_{\text{в}}t_{\text{в}} + m_{\text{в}}\lambda$. Средняя удельная теплоёмкость льда при нагревании от $t_{\text{л}}$ до $0\,^\circ$C равна $c_{\text{ср}} = \frac{c+(c+\alpha t_{\text{л}})}{2} = c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2}$. Тогда количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $0\,^\circ$C равно $Q_{\text{получ}} = c_{\text{ср}}m_{\text{л}}(-t_{\text{л}}) = -(c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2})m_{\text{л}}t_{\text{л}}$. Так как тепловых потерь нет, $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}}$. Используя обозначения $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$ и $\lambda = 2cT$, получим искомую зависимость:

$$t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = -T - \frac{\gamma t_{\text{л}}}{2} - \frac{\alpha\gamma t_{\text{л}}^2}{4c}. \tag{1}$$

Подставив в уравнение (1) точки $(-95; 80)$ и $(-55; 20)$ из диаграммы, в которых пунктирная линия хорошо попадает на узлы координатной сетки, получим

$$\gamma = 4{,}0$$

$$\alpha = 7{,}0 \text{ Дж/(кг} \cdot (^\circ\text{C})^2)$$

Второй способ.

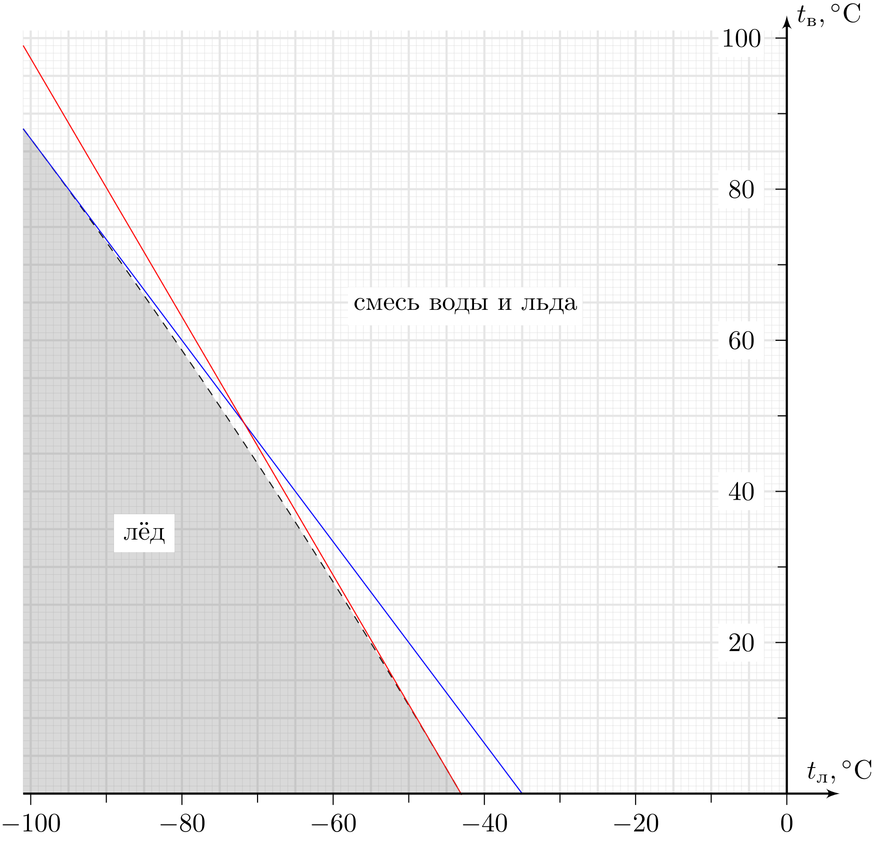
Пунктирная линия на диаграмме, разделяющая состояния "лёд" и "смесь воды и льда", соответствует льду при температуре плавления $0\,^\circ$C. Найдём угловой коэффициент касательной, проведённой к этой пунктирной линии, в точке $(t_{\text{л}}; t_{\text{в}})$. Пусть кусок льда взят при температуре $t_{\text{л}} - \Delta t_{\text{л}} (\Delta t_{\text{л}} \ll t_{\text{л}})$. Определим, на сколько градусов $\Delta t_{\text{в}}$ теплее необходимо взять воду, чтобы содержимым сосуда был лёд при $0\,^\circ$C. Дополнительное количество теплоты, необходимое для плавления льда равно $\Delta Q_{\text{л}} = c_{\text{л}}(t_{\text{л}})m_{\text{л}}\Delta t_{\text{л}}$. Это тепло берётся из-за более теплой воды $\Delta Q_{\text{в}} = 2cm_{\text{в}}\Delta t_{\text{в}}$. Так как тепловых потерь нет, $\Delta Q_{\text{в}} = \Delta Q_{\text{л}}$. Модуль углового коэффициента касательной

$$k = \frac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{л}}(t_{\text{л}})m_{\text{л}}}{2cm_{\text{в}}} = \frac{\gamma}{2}(1 + \frac{\alpha}{c}t_{\text{л}}) \tag{1*}$$

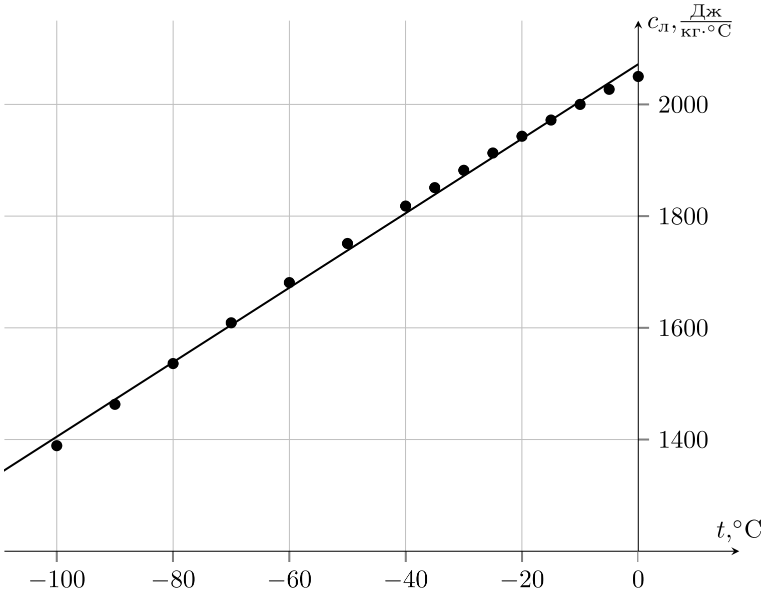
Этот же результат можно было получить дифференцированием по $t_л$ выражения (1), полученного в первом методе решения. Подставив в уравнение (1*) значения для модулей угловых коэффициентов касательных $k_1 = \left|\frac{80-20}{(-90)-(-55)}\right| = 1{,}714$ и $k_2 = \left|\frac{80-0}{(-95)-(-35)}\right| = 1{,}333$, проведенных к точкам пунктирной линии $t_л^{(1)} = -43\,^\circ\mathrm{C}$ и $t_л^{(2)} = -100\,^\circ\mathrm{C}$ соответственно, получим

$$\gamma = 4{,}0$$

$$\alpha = 7{,}0 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot(^\circ\mathrm{C})^2)$$



Реальная зависимость (табличные данные) удельной теплоёмкости льда от его температуры имеет такой вид (см. рисунок).



2. В диаграмме, данной в условии, масса льда была в 4 раза больше массы воды, поэтому конечным состоянием содержимого сосуда не могла быть вода. В данном же пункте задачи, возможно, что конечным состоянием содержимого сосуда может быть и вода. Найдем уравнение линии, соответствующей воде при $0\,°C$. Количество теплоты, которое вода отдаёт при остывании до $0\,°C$: $Q_{отд} = 2cm_в t_в$. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $0\,°C$ и его плавления: $Q_{получ} = -(c + \frac{\alpha t_л}{2}) m_л t_л + m_л \lambda$. Из уравнения $Q_{отд} = Q_{получ}$ получим искомую зависимость:

$$t_в(t_л) = \gamma T - \frac{\gamma t_л}{2} - \frac{\alpha \gamma t_л^2}{4c} \tag{2}$$

Если свободный член в уравнении (2) меньше температуры кипения воды $100\,°C$, то на диаграмме будет область, соответствующая состоянию "вода". Это наш случай, так как $\gamma_0 = \frac{m_л}{m_в} = 1 < \frac{100\,°C}{80\,°C}$. В градусах Цельсия уравнение (2) примет вид

$$t_в(t_л) = 80 - \frac{t_л}{2} - \frac{t_л^2}{1200} \tag{2*}$$

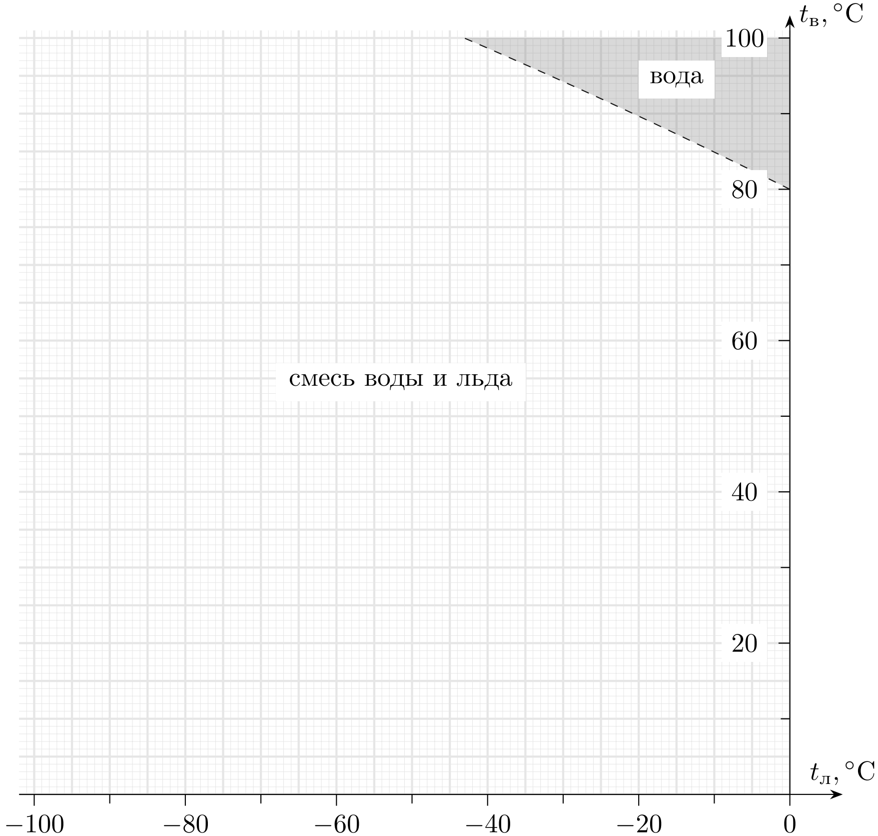
Найдём характерные точки, соответствующие данной зависимости. Одна из точек очевидна – $(0\,°C; 80\,°C)$. Вторую точку найдём как точку пересечения с прямой $t_в(t_л) = 100\,°C$:

$$100 = 80 - \frac{t_л}{2} - \frac{t_л^2}{1200}$$

Решение этого квадратного уравнения даёт $t_л \approx -43\,°\mathrm{C}$ (второй корень не попадает в разрешённый диапазон $[-100\,°\mathrm{C}; 0\,°\mathrm{C}]$). Итак, вторая характерная точка – $(-43\,°\mathrm{C}; 100\,°\mathrm{C})$. Покажем, что на нашей диаграмме не будет состояния "лёд". Действительно, условие пересечения линии, соответствующей льду при $0\,°\mathrm{C}$, с осью абсцисс имеет вид

$$0 = -T - \frac{t_л}{2} - \frac{\alpha t_л^2}{4c}$$

То есть точка пересечения $t_л$ такова, что $-T - \frac{t_л}{2} > 0 \Leftrightarrow t_л < -160\,°\mathrm{C}$. Таким образом, на рассматриваемой области $[-100\,°\mathrm{C}; 0\,°\mathrm{C}]$ пересечения нет, а значит и нет состояния чистого льда на диаграмме. Вид искомой диаграммы изображен на рисунке.



Задача №9-Т4. А когда не натянута?

1. **Первый способ:**

Так как колечко невесомое, равнодействующая приложенных к нему сил равна нулю в любой момент времени. Поскольку трения между спицей и колечком нет, спица действует на колечко в направлении, перпендикулярном спице, то есть в вертикальном. Тогда условие равенства нулю равнодействующей приложенных к колечку сил возможно, только если участок нити, соединяющий колечко с бусинкой, в любой момент ориентирован вертикально. Поскольку длина всей нити постоянна, а участок нити, соединяющий бусинку и кольцо, всё время остаётся вертикальным и по условию в начальный момент времени нить натянута, можем найти проекции начальной скорости на направление нитей. Вертикальный участок удлиняется со скоростью:

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha;$$

горизонтальный участок укорачивается со скоростью:

$$|v_{0x}| = v_0 \cos\alpha;$$

Чтобы длина нити оставалась постоянной, модули проекций скоростей должны быть равны:

$$v_{0y} = |v_{0x}|; \Rightarrow v_0 \sin\alpha = v_0 \cos\alpha; \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1; \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Второй способ:

Участок нити, соединяющий бусинку и кольцо, всё время остаётся вертикальным и по условию в начальный момент времени нить натянута. Пусть b – расстояние от спицы до точки крепления нити O. Приравняем длину нити через малое время Δt к начальной длине $L + b$:

$$L + b = b + v_{0y}\Delta t + \sqrt{(v_{0y}\Delta t)^2 + (L - v_{0x}\Delta t)^2};$$

где v_{0x}, v_{0y} – горизонтальная и вертикальная проекции начальной скорости.

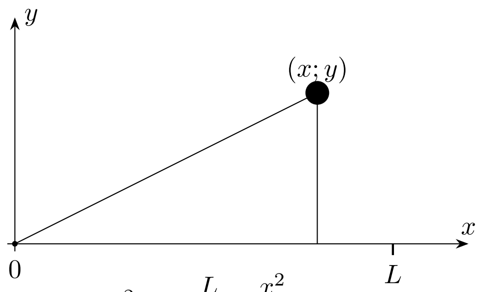
$$(L - v_{0y}\Delta t)^2 = (v_{0y}\Delta t)^2 + (L - v_{0x}\Delta t)^2 L^2 - 2Lv_{0y}\Delta t = L^2 - 2Lv_{0x}\Delta t + (v_{0x}\Delta t)^2.$$

Пренебрежём вторым порядком малости:

$$v_{0y} = v_{0x}; \Rightarrow v_0 \sin\alpha = v_0 \cos\alpha; \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1; \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом: $\alpha = \pi/4$.

2. Проанализируем траекторию движения бусинки. Введём систему координат xy с началом в точке O. Так как расстояние от спицы до начального положения бусинки постоянно, длина участка нити, находящегося выше Ox, также постоянна и равна L.



С учётом этого:

$$L = y + \sqrt{y^2 + x^2}; y^2 + x^2 = L^2 - 2Ly + y^2; y = \frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения при условии натяжения нити является параболой.
Далее найдём минимальную возможную начальную скорость v_{0min} бусинки, при которой нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы.

Первый способ:

При свободном броске в поле тяжести траекторией будет являться парабола, которая касается полученной параболы. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полёта в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити. Получим уравнение траектории при свободном движении в поле тяжести:

$$\begin{cases} y = v_{0min}\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \\ x = L - v_{0min}\cos(\alpha)t \end{cases}$$

учтём, что $\alpha = \pi/4$, тогда:

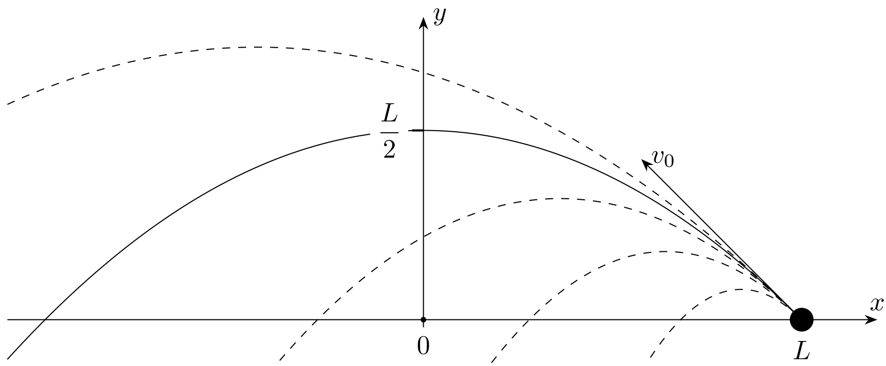
$$y = L - x - \frac{g(L-x)^2}{v_{0min}^2}; y = \frac{Lv_{0min}^2 - gL^2}{v_{0min}^2} + \frac{2gL - v_{0min}^2}{v_{0min}^2}x - \frac{g}{v_{0min}^2}x^2.$$

Сравнивая полученные уравнения для траекторий, получим:

$$v_{0min}^2 = 2gL.$$

Второй способ:

Траектория движения при условии натяжения нити является параболой. При свободном броске в поле тяжести под фиксированным углом $\alpha = \pi/4$ к горизонту траекториями полёта будут являться параболы, касающиеся параболы по которой движется бусинка на нити. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полета в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити.



Найдем горизонтальную проекцию скорости в случае броска по совпадающей траектории:

$$L = v_x t \Rightarrow t = \frac{L}{v_x}; \frac{L}{2} = \frac{gt^2}{2} = \frac{gL^2}{2v_x^2} \Rightarrow v_x = \sqrt{gL} \Rightarrow v_{0min} = \frac{v_x}{\cos\alpha} = \sqrt{2gL}.$$

Третий способ:

При свободном броске в поле тяжести траекторией будет являться парабола, которая касается полученной параболы. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полета в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити. Запишем закон сохранения энергии для системы "бусинка+нить+кольцо". Поскольку нить и кольцо являются невесомыми, их механические энергии равны нулю. Работа сил, действующих на конец O нити со стороны крепления и на кольцо со стороны спицы, равна нулю, поскольку конец нити O закреплён и не перемещается, а кольцо движется перпендикулярно силе взаимодействия со спицей.

$$\begin{cases} \frac{m(v_{0x}^2+v_{0y}^2)}{2} = \frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{mgL}{2} \\ v_{0y} = v_{0min}\sin\alpha \end{cases}$$

учитывая, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$, получаем:

$$v_{0min}^2 = 2gL \Rightarrow v_{0min} = \sqrt{2gL}.$$

Покажем, что при скоростях больших чем v_{0min}, бусинка будет продолжать двигаться по параболе ограниченной нитью. Рассмотрим силы со стороны нити на бусинку. С двух сторон бусинки на нее действуют одинаковые силы натяжения. Тогда результирующая этих двух сил направленна по биссектрисе угла, образованного нитями. Аналогично первой части решения можно показать, что проекция скорости бусинки на вертикальную ось и на ось, направленную вдоль наклонного участка нити, будут равны по модулю. Это означает, что скорость бусинки направлена по биссектрисе внешнего угла, образованного нитями. Так как биссектрисы внешнего и внутреннего углов перпендикулярны, получаем, что скорость всегда перпендикулярна результирующей сил натяжения, а значит работу не совершает и не тормозит бусинку при любых скоростях, больших минимальной. При скоростях больших чем v_{0min} нить является натянутой, поскольку бусинка движется по кривой с меньшим радиусом кривизны, чем у траектории, соответствующей свободному полёту в поле тяжести. Тогда нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы при:

$$v_0 \geqslant \sqrt{2gL}.$$

Задача №9-Т5. Удаление со льда

1. Возможны два различных режима движения ящика: без скольжения по скребку (рис. 1) и с проскальзыванием (рис. 2).
В первом режиме полная реакция опоры $\vec{Q}_c$ (результирующая силы нормальной реакции скребка $\vec{N}_\text{с}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр(с)}}$ действующей на ящик со стороны скребка) направлена вдоль направления движения скребка, поэтому:

$$F_{\text{тр(с)}} = N_\text{с} \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку сила трения покоя удовлетворяет соотношению $F_{\text{тр(с)}} \leqslant \mu N_\text{с}$, то первый режим реализуется при условии:

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \mu.$$

Если данное условие не выполняется, то реализуется второй режим. Во втором режиме сила трения $\vec{F}_{\text{тр(л)}}$, действующая на ящик со стороны льда, направлена противоположно $\vec{Q}_\text{с}$, поскольку ящик изначально неподвижен. При этом $\vec{Q}_c$ образует угол $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ с нормалью к поверхности скребка и угол $\beta = \alpha - \varphi$ с направлением ускорения скребка. Значит и направление движения ящика образует угол β с направлением ускорения скребка.

Для первого ящика $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0{,}176 < \mu$, значит он движется без скольжения по скребку. Для второго ящика $\operatorname{tg} \alpha_2 = 1 > \mu$, и для него реализуется второй режим. Тогда путь первого ящика до границы ледяного поля $s_1 = L$, а значит ускорение скребка:

$$a = \frac{2L}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 0{,}8}{4}\ \text{м/с}^2 = 0{,}4\ \text{м/с}^2$$

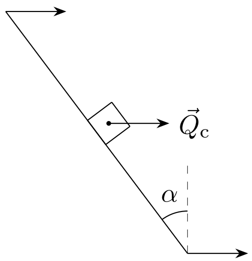


Рис.1

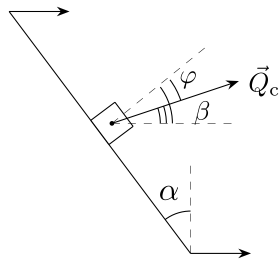


Рис.2

2. Найдём путь L_2 второго ящика, зная, что его направление движения образует угол β с направлением ускорения скребка и ящик двигался из состояния покоя:

$$L_2 \cdot \cos(\beta) = L$$

Следовательно, отношение путей второго и первого ящиков:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \varphi)} \approx 1{,}14$$

3. Поскольку второй ящик движется без отрыва от скребка – проекции скорости ящика и скребка на направление нормали к поверхности скребка в любой момент должны быть одинаковы:

$$v_n = v_{я(n)}.$$

Тогда, поскольку ящик и скребок движутся поступательно – проекции ускорений ящика и скребка на направление нормали к поверхности скребка также должны совпадать:

$$a_n = a_{я(n)}.$$

Векторы ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}_я$ образуют углы α_2 и φ соответственно с нормалью к поверхности скребка:

$$a\cos\alpha_2 = a_я \cos\varphi.$$

Тогда во втором режиме для времени t_2 движения ящика до края поля находим:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L_2}{a_я}} = \sqrt{\frac{2L}{a}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_2\cos(\alpha_2 - \varphi)}} = t_1\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_2\cos(\alpha_2 - \varphi)}}.$$

$$t_2 = t_1\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_2\cos(\alpha_2 - \varphi)}} \approx 2{,}5 \text{ с}.$$

4. Для нахождения силы трения между первым ящиком и скребком расставим силы, действующие на ящик, и запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось, параллельную плоскости скребка:

$$ma\sin\alpha_1 = F_{\text{тр(с)}1} - \mu' mg\sin\alpha_1; F_{\text{тр(с)}1} = m\sin\alpha_1\left(a + \mu' g\right).$$

Для второго ящика из второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось, направленную вдоль нормали к поверхности скребка, получим:

$$ma_{\text{я}(n)} = ma\cos\alpha_2 = N_{\text{с}} - \mu' mg\cos\varphi \Rightarrow F_{\text{тр(с)}2} = \mu m\left(\mu' g\cos\varphi + a\cos\alpha_2\right).$$

Таким образом, отношение сил трения между скребком и ящиком в двух режимах:

$$\frac{F_{\text{тр(с)}2}}{F_{\text{тр(с)}1}} = \frac{\mu\left(\mu' g\cos\varphi + a\cos\alpha_2\right)}{\sin\alpha_1\left(a + \mu' g\right)} \approx 1{,}4.$$