

10.1. Изменение импульса. Тело массой m брошено с обрыва в воду. Через время τ тело падает в воду. Найдите изменение импульса тела за время полета. Ускорение свободного падения g , сопротивление воздуха не учитывать.

Решение (фольклор)

Конечная, начальная скорости, время полета и ускорение свободного полета связаны следующим известным соотношением: $\vec{v}_k = \vec{v}_n + \vec{g}\tau$.

Тогда изменение импульса $\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_k - \vec{v}_n) = m\vec{g}\tau$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	$\vec{v}_k = \vec{v}_n + \vec{g}\tau$	3 балла
2	$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_k - \vec{v}_n)$	3 балла
3	$\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau$	4 балла

10.2. Цепочка. Однородная металлическая цепочка длиной L частично свисает с горизонтального стола так, что на столе лежит лишь часть цепочки длиной x . Цепочку отпускают. С каким ускорением a начнут двигаться точки цепочки в момент ее отпускания, если коэффициент трения цепочки о стол равен μ . Начертите график $a(x)$ с указанием характерных точек.

Решение (Рубцов Д.)

Обозначим линейную плотность цепочки за λ , а силу натяжения цепочки в точке перегиба цепочки за T .

Второй закон Ньютона для свисающей части цепочки (ускорение направлено вниз):

$$\lambda(L - x)a = \lambda(L - x)g - T$$

Второй закон Ньютона для части цепочки, лежащей на столе (здесь ускорение горизонтально):

$$\lambda xg = N$$

$$\lambda xa = T - F_{\text{тр}}$$

В случае скольжения ($a > 0$), $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Решая эту систему уравнений, получим $a(x) = g(1 - \frac{\mu+1}{L}x)$.

Этот ответ не универсален. Он работает лишь в случае $x < \frac{L}{\mu+1}$. В ином случае, $a = 0$.

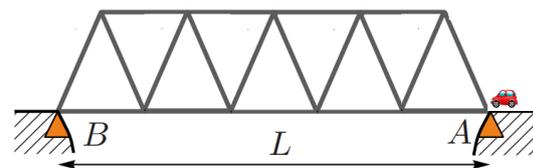
Ответ:

$$a(x) = \begin{cases} g\left(1 - \frac{\mu+1}{L}x\right), & x < \frac{L}{\mu+1} \\ 0, & x \geq \frac{L}{\mu+1} \end{cases}$$

Критерии оценивания (10 баллов)

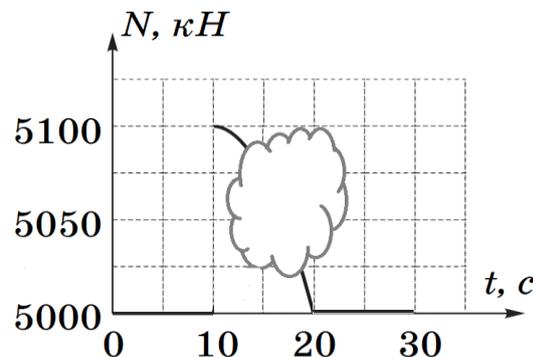
1	Второй закон Ньютона для свисающей части цепочки	2 балла
2	Второй закон Ньютона для части цепочки, лежащей на столе $\lambda xg = N$	1 балл
3	Второй закон Ньютона для части цепочки, лежащей на столе $\lambda xa = T - F_{\text{тр}}$	2 балла
4	$F_{\text{тр}} = \mu N$ в случае скольжения	1 балл
5	Указано, что при определенных параметрах, ускорение может быть нулевым	1 балл
6	$a(x) = g(1 - \frac{\mu+1}{L}x)$	2 балла
7	Граница применимости ответа: $x < \frac{L}{\mu+1}$	1 балла

10.3. Мост. Под одной из двух опор моста установлен датчик, снимающий зависимость силы реакции опоры N от времени (см. график с частично утерянной информацией). В момент времени 10 с из точки А начинает разгоняться с постоянным ускорением a гоночный болид. Гонщик заметил, что в точке В спидометр показывал скорость $v = 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.



Размерами болида пренебречь, мост считать однородным. Определите:

- массу M моста;
- под какой из опор находится датчик;
- массу m болида;
- ускорение a болида;
- длину моста L .



Решение (Рубцов Д.)

Датчик находится, очевидно, под опорой А, ведь в момент времени 10 с происходит резкий скачок силы реакции.

Запишем правило моментов относительно точки В в момент времени 10 с:

$$Mg \frac{L}{2} = N_0 L \text{ (до въезда машины)}$$

$$Mg \frac{L}{2} + mgL = N_1 L \text{ (сразу после въезда машины)}$$

$$N_0 = \frac{Mg}{2} = 5000 \text{ кН, откуда } M = \frac{2N_0}{g} = 1000 \text{ тонн.}$$

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + mg = 5100 \text{ кН, откуда } m = \frac{N_1}{g} - \frac{M}{2} = 10 \text{ тонн}$$

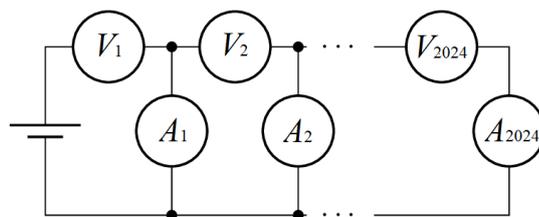
Из графика также понятно, что движение болида по мосту длилось в течение $t = 10$ с.

Тогда ускорение автомобиля $a = \frac{v}{t} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а длина моста $L = \frac{vt}{2} = 250$ м.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Датчик – под опорой А	1 балл
2	В отсутствие болида $N_0 = \frac{Mg}{2}$	1 балл
3	В момент въезда болида $N_1 = \frac{Mg}{2} + mg$	2 балла
4	$M = 1000$ тонн	1 балл
5	$m = 10$ тонн	1 балл
6	Время движения болида $t = 10$ с	1 балл
7	$a = \frac{v}{t} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	1 балл
8	$L = \frac{vt}{2} = 250$ м	2 балла

10.4. 2024. Цепь состоит из 2024 разных амперметров и 2024 одинаковых вольтметров. Показания первого вольтметра U_1 , второго вольтметра U_2 , первого амперметра I_1 . Определите сопротивление вольтметра R_V , а также сумму показаний всех амперметров I_0 .



Решение (Рубцов Д.)

Сила тока через первый вольтметр $J_1 = \frac{U_1}{R_V}$, а через второй вольтметр $J_2 = \frac{U_2}{R_V}$.

По закону сохранения заряда сила тока через первый вольтметр $I_1 = J_1 - J_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_V}$.

Откуда сопротивление вольтметра $R_V = \frac{U_1 - U_2}{I_1}$.

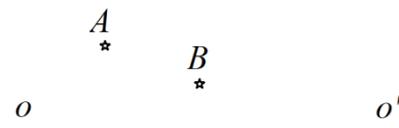
Сумма показаний всех амперметров равна общей силе тока в цепи, т.е. силе тока, протекающей через первый вольтметр $I_0 = J_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_1 \frac{U_1}{U_1 - U_2}$

Ответы: $R_V = \frac{U_1 - U_2}{I_1}$, $I_0 = I_1 \frac{U_1}{U_1 - U_2}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Найдены силы токов через вольтметры $J_1 = \frac{U_1}{R_V}$ и $J_2 = \frac{U_2}{R_V}$	2 балла
2	Закон сохранения заряда $I_1 = J_1 - J_2$	2 балла
3	Сопротивление вольтметра $R_V = \frac{U_1 - U_2}{I_1}$	2 балла
4	Сумма показаний всех амперметров равна силе тока, протекающей через первый вольтметр	2 балла
5	$I_0 = I_1 \frac{U_1}{U_1 - U_2}$	2 балла

10.5. Оптика. В архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы, на которой были изображены линза, точечный источник света и его изображение в линзе. От времени чернила выцвели и на чертеже остались видны лишь главная оптическая ось линзы OO' , точечный источник света и его изображение.



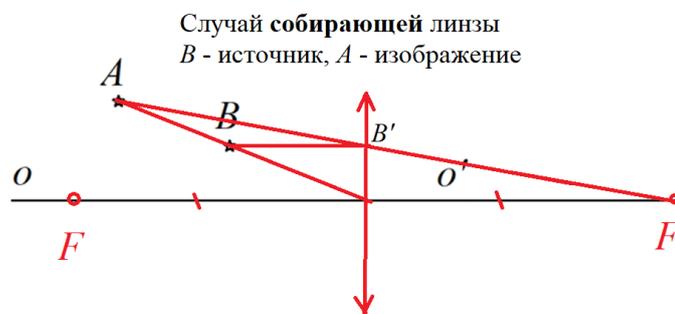
Последние обозначены точками A и B , однако неизвестно, какая из точек является источником, а какая – изображением. Перечертите (схематично) чертеж в бланк решений и восстановите тип линзы (собирающая/рассеивающая), а также расположение линзы и ее фокусов.

Решение (фольклор)

Возможны два случая: собирающая или рассеивающая линза.

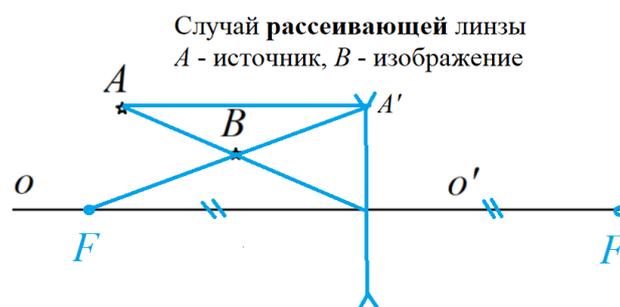
Общее для обоих случаев. Пересечение линий AB и OO' - оптический центр линзы C . Плоскость, проходящая через точку C перпендикулярно главной оптической оси – плоскость линзы.

В случае *собирающей* линзы изображение и источник могут быть по одну сторону от главной оптической оси лишь в случае мнимого увеличенного изображения. Итак, A – изображение, B – источник. Проведем через точку B прямую, параллельную OO' до точки пересечения с линзой B' .



Пересечение AB' с OO' дает фокус линзы. Второй фокус восстанавливается тривиально.

В случае *рассеивающей* линзы, изображение – мнимое и уменьшенное. Итак, B – изображение, A – источник. Проведем через точку A прямую, параллельную OO' до точки пересечения с линзой A' . Пересечение $A'B$ с OO' дает фокус линзы. Второй фокус восстанавливается тривиально.



Критерии оценивания (10 баллов)

1	Восстановлен оптический центр	2 балла
2	Восстановлена плоскость линзы	1 балл
3	Указано, что возможны два случая	1 балл
4	Восстановлен хотя бы один фокус собирающей линзы	3 балла
5	Восстановлен хотя бы один фокус рассеивающей линзы	3 балла

В случае решения, отличного от анализа линеаризованного графика, участник может получить баллы за пункты 1, 2, 5. Баллы за пункт 5 ставятся в случае попадания в 20% диапазон от эталонных значений.