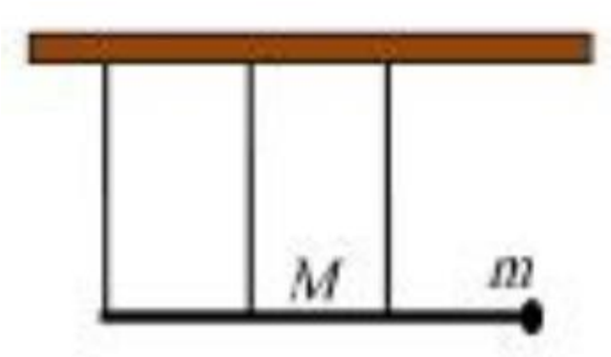
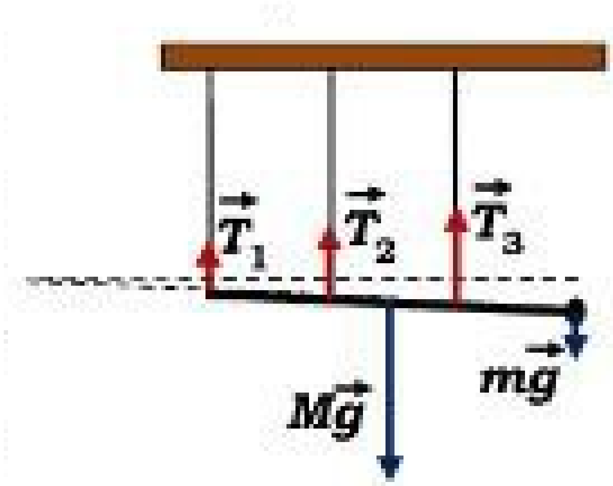
1. «Равновесие»

Однородный стержень массой 1 кг подвешен на трёх одинаковых длинных лёгких практически нерастяжимых нитях таким образом, что все три нити вертикальны. При этом одна из нитей прикреплена к «левому» концу стержня, другая – к точке, расположенной на расстоянии, равном трети длины стержня от этого конца, а третья – на таком же расстоянии от второй (см. рисунок). К «правому» концу стержня прикреплён небольшой по размеру груз массой 200 г. Найдите силу натяжения «средней» нити в состоянии равновесия. Деформация стержня и потолка значительно меньше, чем деформации нитей. Ускорение свободного падения считать равным $9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Возможное решение:

1. На стержень действуют силы тяжести стержня, приложенная к середине, вес небольшого груза, равный его силе тяжести, когда система придёт в равновесие, и силы натяжения трёх нитей, если они натянуты.



2. Пусть все нити натянуты. Тогда в состоянии равновесия будет выполняться правило моментов относительно, например, левого конца стержня и правило сил: $T_2\frac{l}{3} + T_3\frac{2l}{3} = Mg\frac{l}{2} + lmg; T_1 + T_2 + T_3 = Mg + mg$. Тут три неизвестных и два уравнения.
3. Так как все нити натянуты, а силы упругости пропорциональны деформациям нитей, то появляется ещё одно уравнение, которого не хватает для решения задачи. Деформации нитей – это отрезки трёх параллельных прямых между сторонами угла, изображённого на рисунке. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то её деформация есть полусумма деформаций этих нитей, то есть $2x_2 = x_1 + x_3$.
4. Нити одинаковы, поэтому коэффициенты жёсткости у них одинаковые. Домножим на коэффициент жёсткости нитей уравнение из п.3 и получим соотношение для сил натяжения: $2T_2 = T_1 + T_3$.
5. Решая систему уравнений, получим, что $T_2 = \frac{M+m}{3}g$.
6. Проверим предположение о том, что нити натянуты. При этом все силы натяжения должны быть положительны.
7. $T_3 = \frac{7}{12}Mg + \frac{4}{3}mg > 0,\ T_1 = \frac{M-8m}{12}g$ =>третья нить натянута при любых значениях масс стержня и груза, а первая будет натянута, если $m < \frac{M}{8}$, но это условие не выполняется! Значит, первая нить не натянута.
8. Из пункта 7 следует, что начальная система уравнений реально имеет вид: $T_2\frac{l}{3} + T_3\frac{2l}{3} = Mg\frac{l}{2} + lmg; T_2 + T_3 = Mg + mg$.
9. Из п.8 получим, что $T_2 = \frac{M-2m}{2}g = 2{,}9$Н, $T_3 = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)g = 8{,}8$Н.Обе силы положительны, следовательно, нити натянуты, а результат верный.

Система оценивания задачи:
Написан второй закон Ньютона и правило моментов для стержня – **1 балл**
Предположено, что нити натянуты, и найдено уравнений, связывающее деформации нитей из п.3 – **1 балл**
Найдено соотношение сил натяжения из п.4 – **1 балл**
Решена система и получен ответ из п.5 – **1 балл**
Сказано, что предположение о натяжении нити необходимо проверить – **1 балл**
В результате проверки получено условие натяжения первой нити – **2 балла**
Записана верная система уравнений из п.8 – **1 балл**
Получен верный ответ – **2 балла**
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Юный физик»

   Юный физик Макс зимой нашёл снежную горку. Он взял два однородных сплошных цилиндра равной массы и спустил с горки. Первый цилиндр был спущен по практически гладкой ледяной накатанной дорожке и не вращался в течение всего спуска. Второй цилиндр катился без проскальзывания по снежному склону рядом с дорожкой. Какой цилиндр окажется у подножия горки первым, если они стартуют одновременно? Насколько один из цилиндров окажется раньше другого у подножия горки? Угол наклона горки 30°, высота горки 4 м.

Возможное решение:

1. Рассмотрим второй цилиндр, скатывающийся без проскальзывания с горки как с наклонной плоскости. На цилиндр действует только трение покоя, сила тяжести и нормальной реакции опоры.
2. Второй закон Ньютона в проекциях на ось, направленную по ускорению центра масс (точки С), и ось, перпендикулярную наклонной плоскости, записывается так:
   ox: $mgsin\alpha - F_{\text{тр}} = ma_{c2}$; $N - mgcos\alpha = 0$
3. Основное уравнение динамики вращения для цилиндра относительно центра масс:
   $\beta = \frac{M_{F\text{тр}} + M_{mg} + M_N}{I} = \frac{M_{F\text{тр}}}{0,5mR^2} = \frac{F_{\text{тр}}R}{0,5mR^2} = \frac{mgsin\alpha - ma_{c2}}{0,5mR}$.
4. Рассмотрим точку соприкосновения цилиндра и наклонной. Т.к. нет проскальзывания, её скорость в СО-Земля всегда равна нулю и складывается векторно из скорости центра масс и линейной скорости вращения данной точки относительно центра масс. Следовательно, $v' = v_c \Rightarrow \Delta v' = \Delta v_{c2} \Rightarrow$ тангенциальное ускорение крайних точек цилиндра βR равно ускорению центра масс a_{c2}.
5. Решая пункты 3 и 4, получим $a_{c2} = \frac{gsin\alpha}{1,5}$.
6. Высота горки $h = Ssin\alpha$, где $S = \frac{a_{c2}t^2}{2}$ – длина горки, а $\alpha = 30°$. Отсюда $t_2 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}*2h}{gsin^2\alpha}} = 2,2$ с.
7. Рассмотрим первый цилиндр, который спущен по гладкой дорожке. На него действует только сила тяжести и нормальной реакции опоры.
8. Второй закон Ньютона в проекциях на ось, направленную по ускорению центра масс (точки С), и ось, перпендикулярную наклонной плоскости, записывается так:
   ox: $mgsin\alpha = ma_c$; $N - mgcos\alpha = 0$
9. Отсюда $a_{c1} = gsin\alpha$. Аналогично пункту 6, получим: $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{gsin^2\alpha}} = 1,8$ с.
10. Следовательно, первый цилиндр окажется у подножия горки раньше на 0,4 с , чем второй.

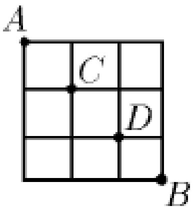
Система оценивания задачи:

Записан второй закон Ньютона для цилиндра 1 – **1 балл**
Записан второй закон Ньютона для цилиндра 2 – **1 балл**
Записано основное уравнение динамики вращения для цилиндра 2 – **1 балл**
Доказано, что тангенциальное ускорение крайних точек шара βR равно ускорению центра масс – **1 балл**
Получено ускорение a_{c2} из п.5 – **1 балл**
Получено ускорение a_{c1} из п.9 – **1 балл**
Получено время t_1 – **1 балл**
Получено время t_2 – **1 балл**
Получена разность $t_2 - t_1$ – **1 балл**
Записан ответ из п.10 – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Каркас»

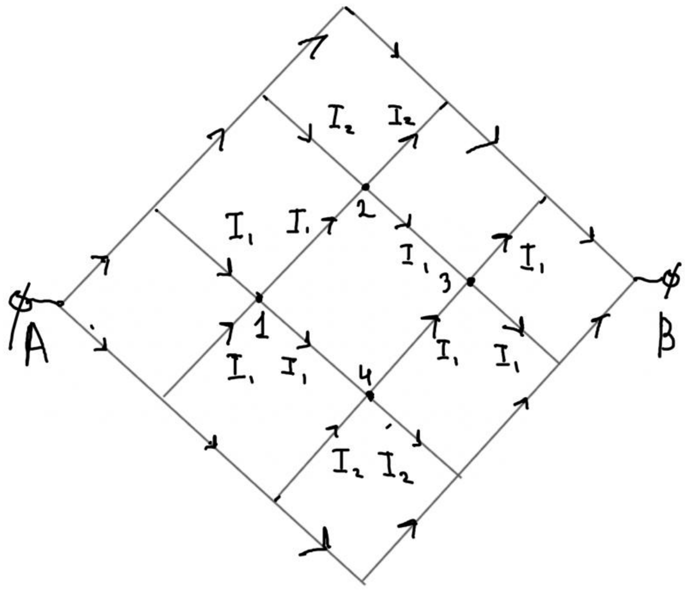
Из металлических стержней собран каркас, показанный на рисунке.



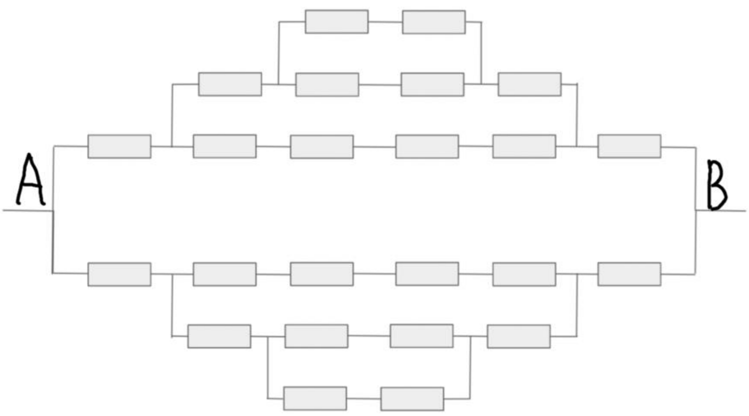
Определите сопротивление каркаса между контактами A и B. Чему равно сопротивление между контактами C и D?

Возможное решение:

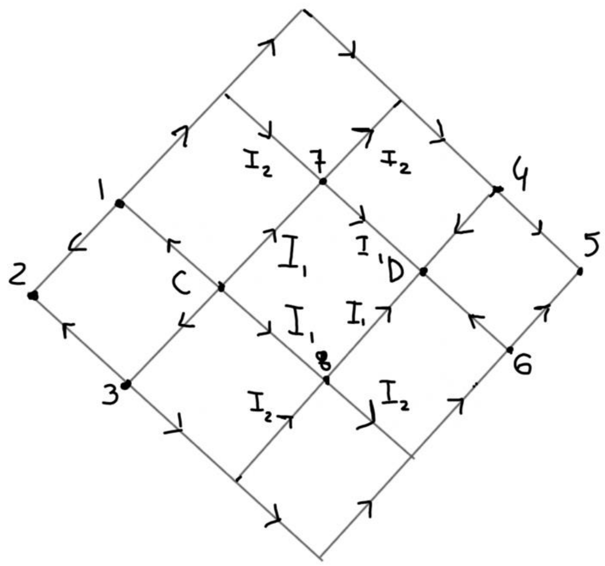
1. Рассмотрим подключение AB. Токи распределены так, как показано на рисунке из-за симметрии построения каркаса.



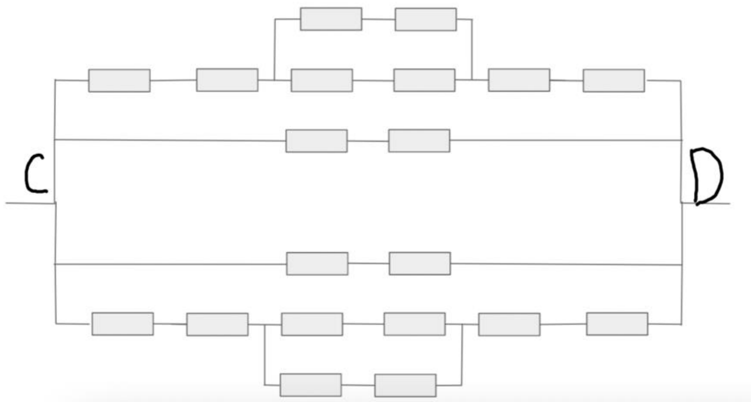
2. Вследствие пункта 1, в точках 1,2,3,4 цепь можно разъединить без изменения общего сопротивления участка цепи. Тогда эквивалентная схема выглядит так:



3. Общее сопротивление этого участка тогда будет равно $\frac{13}{2}R$.
4. Рассмотрим соединение CD. В этой цепи токи будут распределены так, как показано на рисунке.



5. Вследствие п.4, на участках 1-2,2-3,4-5,5-6 ток не будет течь, а в точках 7 и 8 участки можно разъединить без изменения общего сопротивления участка цепи. Тогда эквивалентная цепь будет выглядеть так, как показано на рисунке.



6. Общее сопротивление этого участка тогда будет равно $\frac{5}{7}R$.

Система оценивания задачи:

Показано распределение токов при подключении к контактам АВ – **1 балл**

Показано, в каких местах цепь можно разъединить без изменения сопротивления цепи – **1 балл**

Изображена эквивалентная цепь при подключении к контактам АВ – **2 балла**

Посчитано сопротивление участка цепи при подключении к контактам АВ **– 1 балл**

Показано распределение токов при подключении к контактам CD – **1 балл**

Показано, в каких местах цепь можно разъединить без изменения сопротивления цепи – **1 балл**

Изображена эквивалентная цепь при подключении к контактам CD – **2 балла**

Посчитано сопротивление участка цепи при подключении к контактам CD **– 1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Линза»

Гоша нарисовал карандашом на клетчатой бумаге круг с радиусом 3 см. Затем поставил листик вертикально и посмотрел на этот листик через выпуклую сферическую линзу (центр круга, центр сферической линзы и глаз находятся на одной горизонтальной прямой). Считая линзу тонкой, определите, каким фокусом обладает линза, если площадь изображения круга относится к его настоящей площади как 4 к 5.

Расстояние от Гоши до листика равно 1 м.

Возможное решение:

1. Так как площадь изображения меньше площади предмета, изображение получилось действительным и уменьшенным. Тогда напишем формулу тонкой линзы:
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$
2. Из условия следует, что $d + f = 1\text{м}$.
3. Увеличение линзы равно $\Gamma = \frac{f}{d}$.
4. Так как нам дано соотношение площадей, а все линейные размеры уменьшились в одинаковое количество раз, то отношение площади изображения к площади предмета будет равно $\Gamma^2 = \frac{4}{5} => f = \frac{\sqrt{5}}{2}d.$
5. Из пунктов 1,2,4 получим $d = \frac{2}{\sqrt{5}+2}\text{м}, F = \frac{fd}{f+d} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}d = \frac{2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}\text{м} = 0{,}25\ \text{м}.$

Система оценивания задачи:

Написана формула тонкой линзы из п.1 – **2 балла**

Написана формула увеличения линзы из п.3 – **2 балла**

Сказано, что отношение площади изображения к площади предмета есть увеличение в квадрате – **3 балла**

Найдено фокусное расстояние из п.5 – **3 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Необычный брусок»

В лаборатории у инженера Иванова находится брусок массы $m_1 = 3$ кг, изготовленный из материала, удельная теплоёмкость которого линейно зависит от его температуры t. Инженер Иванов взял брусок, нагрел его до температуры $t_1 = 100°\text{C}$ и опустил в калориметр, в котором находится $m_2 = 1400$ г медного купороса при температуре $t_2 = 10°\text{C}$. Через длительный промежуток времени температура в калориметре оказалась равной $t_0 = 60°\text{C}$. Пренебрегая теплоёмкостью калориметра и тепловыми потерями, помогите инженеру Иванову определить удельную теплоёмкость c_2 медного купороса в калориметре. Удельная теплоёмкость бруска зависит от температуры по закону $c = c_1(1 + \alpha t)$, где $c_1 = 1{,}2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}}$ и $\alpha = 0{,}013°\text{C}^{-1}$.

Возможное решение:

1. Поскольку вся системы находится в калориметре, можно будет записать таким образом уравнение теплового баланса: $Q_1 + Q_2 = 0$, где Q_1 – количество теплоты, отданное бруском, Q_2 – количество теплоты, полученное медным купоросом.
2. $Q_2 = c_2 m_2 (t_0 - t_2)$, Q_1 можно найти из графика зависимости $cm_1(t)$ как площадь под этим графиком. Тогда $Q_1 = \ c_1 m_1 (t_0 - t_1)(1 + \frac{\alpha}{2}(t_0 + t_1))$.
3. Решая систему из п.1 и 2, получим $c_2 = c_1 \frac{m_1}{m_2} \frac{(t_1 - t_0)}{t_0 - t_2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}(t_0 + t_1)\right) = 4{,}2 \cdot\ 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$

Система оценивания задачи:

Написано уравнение теплового баланса для системы – **2 балла**

Рассчитано из графика $cm_1(t)$ количество теплоты, отданное бруском – **4 балла**

Получена формула из пункта 3 – **2 балла**

Получен конечный ответ – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов