

10 класс

Задача 10.1. Движемся вместе.

На горизонтальной ледяной поверхности находятся два бруска, один на другом (рис. 10.1). Нижний брусок имеет массу $2m$, а верхний — массу m . К верхнему бруску прикладывают постоянную горизонтальную силу F . При каких значениях F бруски будут двигаться направо, не смещаясь друг относительно друга? Ускорение свободного падения равно g . Коэффициент трения нижнего бруска о лёд равен $0,1$, а коэффициент трения между брусками — $0,4$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

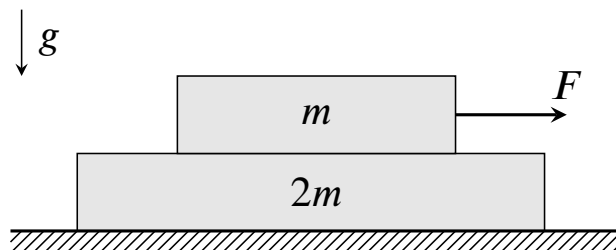


Рис. 10.1.

Ответ: $0,3mg < F < 0,45mg$.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения нижнего бруска о лёд. Если оба бруска движутся вместе, их можно рассматривать как одно тело массой $3m$. Оно под действием силы F придёт в движение при условии, что

$$F > \mu \cdot 3mg \quad \Rightarrow \quad F > 0,3mg.$$

Ускорение системы будет равно $a = (F - 0,3mg)/(3m)$.

Запишем теперь 2й закон Ньютона для верхнего бруска:

$$ma = F - F_{\text{тр}} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = F - ma = F - \frac{F - 0,3mg}{3} = \frac{2F}{3} + 0,1mg.$$

Пусть μ' — коэффициент трения между брусками. Верхний брусок не будет двигаться по нижнему, если

$$F_{\text{тр}} < \mu' mg \quad \Rightarrow \quad \frac{2F}{3} + 0,1mg < 0,4mg \quad \Rightarrow \quad F < 0,45mg.$$

Отсюда получим, что бруски будут двигаться, не смещаясь относительно друг друга, при следующих значениях F :

$$0,3mg < F < 0,45mg.$$

Критерии:

- 1) Записано условие $F > 0,3mg$ или его аналог 1 балл
- 2) Записан второй закон Ньютона для обоих тел, как единого целого 2 балла
- 3) Записан второй закон Ньютона для верхнего тела 2 балла
- 4) Указано, что сила трения между брусками $F_{\text{тр}} < 0,4mg$ 1 балл
- 5) Найдено, что $F < 0,45mg$ 3 балла
- 6) Записан ответ $0,3mg < F < 0,45mg$ или его аналог 1 балл

Указания проверяющим:

- 1) Во всех приведённых неравенствах различие между парами знаков: $<$ и $\leq$, $>$ и $\geq$, — считать физически несущественным.
- 2) Если в пункте 2 (или 3) вместо указанного в критериях, верно записан 2-й закон Ньютона для нижнего тела, баллы за соответствующий пункт ставятся.
- 3) Балл за пункт 6 не ставится, если не указано, что неравенства из пп. 1 и 5 должны выполняться одновременно.

Задача 10.2. Прыг-скок.

Тело, брошенное под углом α к горизонту с одного края прямоугольной ямы, падает на другой её край (см. рис. 10.2). Если же, не меняя угол и место броска, уменьшить начальную скорость тела в три раза, оно, один раз упруго отскочив от плоского дна ямы, снова попадёт на её противоположный край. Чему равна глубина ямы H , если её длина равна L ? Сопротивлением воздуха и размерами тела пренебречь.

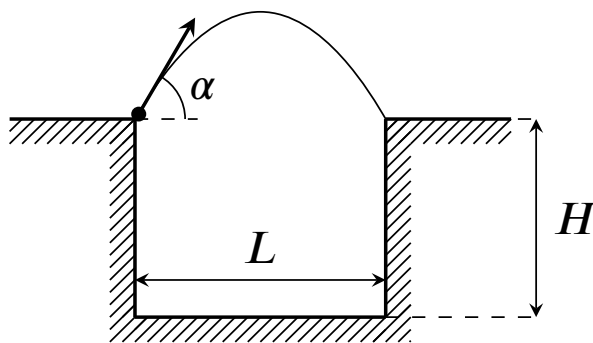


Рис. 10.2.

Ответ: $\frac{7L \operatorname{tg} \alpha}{4}$.

Решение: Пусть v — начальная скорость тела. Тогда

$$L = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2 \sin \alpha \cos \alpha}}.$$

Если начальная скорость тела уменьшится втрое, оно должно попасть в точку на середине дна ямы:

$$\frac{L}{2} = \frac{v}{3} \cdot t \cos \alpha, \quad -H = \frac{v}{3} \cdot t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразив из первого уравнения время t , получим

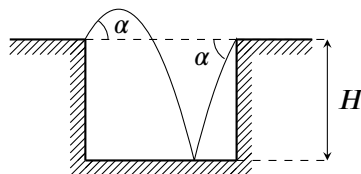
$$-H = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{9L^2}{4v^2 \cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad -H = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{9L^2 \sin \alpha}{2gL \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{7L}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Критерии:

- 1) Записана формула $L = 2v^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$ или её аналог 1 балл
- 2) Записана формула $L/2 = vt \cos \alpha / 3$ или её аналог 3 балла
- 3) Записана формула $-H = vt \sin \alpha / 3 - gt^2 / 2$ или её аналог 3 балла
- 4) Найдено, что $H = 7L \operatorname{tg} \alpha / 4$ 3 балла

Уточнение по задаче 10.2:

Помимо траектории, рассмотренной в авторском решении, существует ещё одна возможность телу после единственного отскока попасть в противоположный край ямы (см. рис.).



В условии задачи требуется найти глубину ямы H , при которой тело «снова попадёт на её противоположный край», а не «в край». Поэтому, чтобы не впадать с учащимися в филологические дискуссии, задача должна оцениваться следующим образом:

- 1) Если учащийся рассмотрел только авторский вариант траектории тела, жюри использует исходные критерии.
- 2) Если учащийся рассмотрел только второй вариант, он оценивается согласно критериям, приведённым ниже.
- 3) Если учащийся рассмотрел оба варианта, оценивается лучший.

Краткое решение для второго случая:

Пусть t_1 и t_2 — времена движения тела до и после отскока соответственно, а v — начальная скорость тела. Тогда

$$L = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gL}{2 \sin \alpha \cos \alpha}},$$

$$L = \frac{v}{3} \cdot (t_1 + t_2) \cos \alpha, \quad -H = \frac{v}{3} \cdot t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2}, \quad -H = -\frac{v}{3} \cdot t_2 \sin \alpha - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Комбинируя найденные выражения, получим

$$t_1 + t_2 = \frac{6v \sin \alpha}{g}, \quad t_1 - t_2 = \frac{2v \sin \alpha}{3g} \Rightarrow t_1 = \frac{10v \sin \alpha}{3g}, \quad t_2 = \frac{8v \sin \alpha}{3g}.$$

Отсюда

$$H = -\frac{v}{3} \cdot t_1 \sin \alpha + \frac{gt_1^2}{2} = -\frac{10v^2 \sin^2 \alpha}{9g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{100v^2 \sin^2 \alpha}{9g^2} = \frac{40v^2 \sin^2 \alpha}{9g} = \frac{20L}{9} \operatorname{tg} \alpha.$$

Критерии:

- 5) Записана формула $L = 2v^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$ или её аналог 1 балл
- 6) Записана формула $L = v(t_1 + t_2) \cos \alpha / 3$ или её аналог 3 балла
- 7) Записана формула $-H = \frac{v}{3} \cdot t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2}$ или её аналог 1,5 балла
- 8) Записана формула $-H = -\frac{v}{3} \cdot t_2 \sin \alpha - \frac{gt_2^2}{2}$ или её аналог 1,5 балла
- 9) Найдено, что $H = 20L \operatorname{tg} \alpha / 9$ 3 балла

Задача 10.3. Делитель напряжения.

Потенциометром (рис. 10.3а) называется резистор, снабжённый дополнительным скользящим контактом (ему соответствует средний вывод устройства), который на схемах условно обозначается стрелкой. Вращением ручки потенциометра можно изменять сопротивление между средним и каким-либо другим выводом, в идеальном случае, от нуля до максимального значения R .

Готовясь к экспериментальному туру по физике, мальчик Паша собрал цепь, состоящую из источника постоянного напряжения, резистора, потенциометра и амперметра (рис. 10.3б). Вращая ручку потенциометра, Паша заметил, что сила тока через амперметр меняется, причём минимальное показание прибора равно $I_{\min} = 2$ мА, а максимальное — $I_{\max} = 5$ мА. Найдите напряжение источника U_0 и максимальное сопротивление потенциометра R , если сопротивление резистора $r = 200$ Ом. Амперметр, потенциометр и источник считайте идеальными.

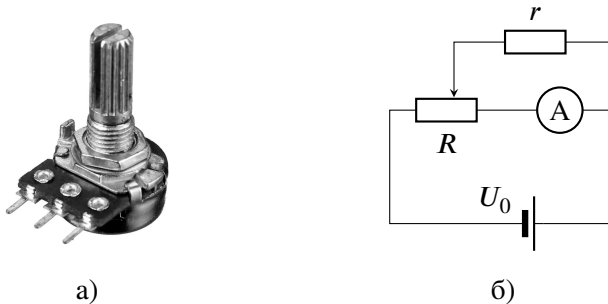


Рис. 10.3.

Ответ: 6 В, 1200 Ом.

Решение: Пусть xR — сопротивление потенциометра между средним и правым (по схеме на рис. б) контактом, а $(1-x)R$ — соответственно, сопротивление между средним и левым контактом, где x может принимать значения от 0 до 1. Если сила тока через амперметр равна I , то сила тока через резистор r составит $I_r = xRI/r$, а сила тока через источник — $I_0 = I(1 + xR/r)$. Найдём общее напряжение в цепи и приравняем его U_0 :

$$I_0(1-x)R + I \cdot xR = U_0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_0/R}{(1-x)(1+xR/r) + x} = \frac{U_0/R}{1 + (x-x^2)R/r}.$$

В знаменателе полученного выражения находится квадратный трёхчлен, максимальное значение которого соответствует минимальному значению I и наоборот. Своего максимального значения этот трёхчлен достигает в точке $x = 1/2$ (вершина параболы), а минимального — при $x = 0$ или $x = 1$ (при крайних значениях x). Таким образом,

$$I_{\min} = \frac{U_0/R}{1 + R/(4r)}, \quad I_{\max} = U_0/R.$$

Отсюда

$$1 + \frac{R}{4r} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = 2,5 \quad \Rightarrow \quad R = 6r = 1200 \text{ Ом},$$

$$U_0 = I_{\max} R = 0,005 \text{ А} \cdot 1200 \text{ Ом} = 6 \text{ В}.$$

Критерии:

- 1) Найдена связь между током через амперметр и током через резистор r 1 балл
- 2) Записано уравнение $I_0(1-x)R + I \cdot xR = U_0$ или его аналог 1 балл
- 3) Получена зависимость силы тока через амперметр I от положения движка потенциометра 2 балла
- 4) Указано, что максимальное значение I достигается в крайнем положении 1 балл
- 5) Найдено, что минимальное значение I достигается в среднем положении 2 балла
- 6) Найдено значение $R = 1200$ Ом 1,5 балла
- 7) Найдено значение $U_0 = 6$ В 1,5 балла

Указание проверяющим:

- 1) В формулах для пп. 1-3 могут быть использованы иные обозначения, отличные от авторских.
- 2) Зависимость в п. 3 должна содержать только r , R , U_0 и переменную, связанную с положением движка потенциометра.
- 3) Если за п. 3 выставлены баллы, то баллы за пп. 1 и 2 ставятся автоматически.
- 4) В п. 5 утверждение, что минимальное I соответствует среднему положению движка, должно быть пусть и кратко, но обосновано (с помощью свойств параболы, с помощью вычисления производной и т.п.). В противном случае баллы в п. 5 не ставить (ответ считается «угаданным»).
- 5) Если п. 5 не оценён, не ставятся баллы и за ответы в пп. 6 и 7.

Задача 10.4. Преломление в полусфере.

На плоском столе находится прозрачная полусфера радиуса $R = 10$ см с показателем преломления $n = \sqrt{2}$. На неё вдоль поверхности стола на высоте $h = R/\sqrt{2}$ падает световой луч (рис. 10.4). Определите, на каком расстоянии s от поверхности полусферы луч попадёт на стол. Показатель преломления воздуха, окружающего полусферу, примите равным единице.

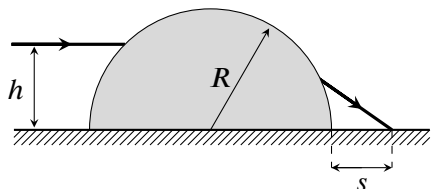


Рис. 10.4.

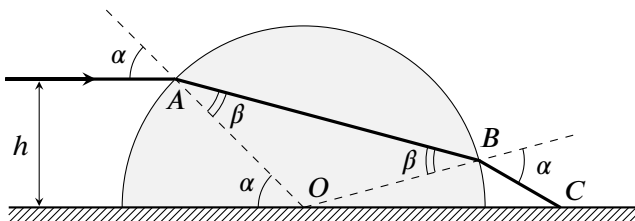


Рис. 10.5.

Ответ: 4,1 см.

Решение: Построим ход луча в полусфере (рис. 10.5). Так как $h = R/\sqrt{2}$, угол падения в точке A равен $\alpha = 45^\circ$. Из закона Снеллиуса найдём угол преломления β :

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 30^\circ.$$

Треугольник $\triangle AOB$ является равнобедренным ($AO = BO = R$), поэтому $\angle OBA = \angle OAB = \beta = 30^\circ$. Соответственно, угол, под которым луч выходит из полусферы, снова равен $\alpha = 45^\circ$.

Рассмотрим теперь $\triangle BOC$ и найдём его углы:

$$\angle OBC = 180^\circ - \alpha = 135^\circ, \quad \angle BOC = 2\beta - \alpha = 15^\circ, \quad \angle BCO = \alpha - \angle BOC = 30^\circ.$$

Запишем теперь для этого треугольника теорему синусов, учитывая, что $OC = R + s$:

$$\frac{R + s}{\sin 135^\circ} = \frac{R}{\sin 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad s = R(\sqrt{2} - 1) \approx 4,1 \text{ см.}$$

Критерии:

- | | |
|---|-----------|
| 1) Записано, что угол падения луча на полусферу равен 45° | 0,5 балла |
| 2) Найдено, что угол преломления луча в полусфере равен 30° | 0,5 балла |
| 3) Найдено, что $\angle OBA = \angle OAB$ | 1 балл |
| 4) Найдены правильные значения углов $\triangle BOC$ | 1 балл |
| 5) Правильно записано уравнение (или система уравнений), необходимое для нахождения s | 3 балла |
| 6) Найдено, что $s = R(\sqrt{2} - 1)$ | 3 балла |
| 7) Найдено, что $s \approx 4,1$ см | 1 балл |

Указание проверяющим:

- 1) Обозначения точек и/или углов могут не совпадать с приведёнными в авторском решении.
- 2) Пункты 1, 3, 4 критериев могут находиться внутри различных уравнений или быть указаны на чертежах.
- 3) Если значение s сразу записано в виде верного числа, то баллы за п. 6 ставить автоматически.

Задача 10.5. Поворот с ускорением.

Экспериментатор Иннокентий Иванов на своём полноприводном автомобиле хочет совершить следующий манёвр: стартовав из точки A (см. рис. 10.6) и разгоняясь по дуге AB , равной 90° , попасть в точку B . Скорость автомобиля в процессе движения меняется по закону $v = at$, где a — постоянная, называемая касательным ускорением, t — время, прошедшее от старта в точке A . Считая, что автомобиль Иннокентия всё время движется по горизонтальной поверхности, определите максимально возможное значение касательного ускорения a , при котором машина удержится на дуге AB . Коэффициент трения между колёсами и поверхностью равен μ , ускорение свободного падения — g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

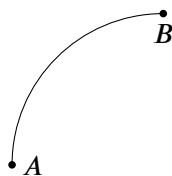


Рис. 10.6.

Ответ: $\mu g / \sqrt{1 + \pi^2}$.

Решение: Пусть R — радиус дуги AB , тогда её длина равна $L = \pi R/2$. Так как автомобиль Иннокентия движется по ней с постоянным касательным ускорением, $L = at^2/2$, где t — время манёвра. Приравнявая записанные выражения, получим

$$\pi R = at^2.$$

При совершении указанного в условии манёвра полное ускорение автомобиля обеспечивается действующей на него силой трения, максимальное значение которой равно $(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = \mu mg$. Откуда следует, что максимально допустимое значение полного ускорения $a_{\text{полн}} = \mu g$. С другой стороны, полное ускорение автомобиля есть геометрическая сумма двух взаимно перпендикулярных компонент — касательного и центростремительного ускорений:

$$a_{\text{полн}}^2 = a^2 + (v^2/R)^2.$$

Так как a и R не меняются в процессе движения, полное ускорение будет наибольшим в точке B :

$$a_{\text{полн } B}^2 = a^2 + (a^2 t^2 / R)^2 = a^2 + (a\pi)^2 = a^2(1 + \pi^2) \quad \Rightarrow \quad a_{\text{полн } B} = a\sqrt{1 + \pi^2}.$$

Поскольку максимально возможное полное ускорение равно μg , соответствующее ему максимально возможно касательное ускорение равно

$$a_{\text{max}} = \frac{\mu g}{\sqrt{1 + \pi^2}}.$$

Критерии:

- | | |
|--|-----------|
| 1) Записано уравнение $\pi R = at^2$ или аналог | 2 балла |
| 2) Использована формула $a_{\text{полн}} = \sqrt{a^2 + v^4/R^2}$ или её аналог | 2 балла |
| 3) Записано, что максимальное значение полного ускорения равно μg | 1,5 балла |
| 4) Найдена величина полного ускорения в точке B ($a_{\text{полн } B} = a\sqrt{1 + \pi^2}$) | 3 балла |
| 5) Получен правильный ответ | 1,5 балла |

Указание проверяющим:

- В п. 3 важно, чтобы речь шла именно о **полном** ускорении автомобиля. Просто формула $a = \mu g$ оценивается в ноль баллов.
- Формула для полного ускорения (п. 2) может быть не написана явно, а сразу использована при подсчёте $a_{\text{полн } B}$. Если она использована корректно, баллы за п. 2 ставить.