10 класс. Решения и критерии.

10-1. Скорый поезд Воркута – Москва, когда его первый вагон со скоростью v_0 миновал станцию «Сосногорск», начал разгон с некоторым постоянным ускорением. С какой скоростью последний вагон поезда проедет мимо следующей по пути следования станции «Ухта»? Времена прохождения перегона «Сосногорск-Ухта» для первого и последнего вагонов отличаются в два раза, а расстояние между этими станциями в n раз больше длины поезда.

Решение

Выбрав в качестве начала отсчета по времени момент, когда поезд начал двигаться с ускорением, введем обозначения для последующих характерных ситуаций данной задачи: t_1 – момент, когда последний вагон миновал «Сосногорск», t_2 – момент, когда первый вагон проехал «Ухту», t_3 – момент, когда хвост поезда миновал «Ухту». Если длину поезда обозначить как ℓ, то расстояние между станциями будет равно $n\ell$. Запишем систему кинематических уравнений:

$$\begin{cases} \ell = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ \ell = v_0(t_3 - t_2) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_2^2) \\ n\ell = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \\ n\ell = v_0(t_3 - t_1) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_1^2) \end{cases}$$

Первая пара из них относится к перемещению первого вагона относительно станций, а вторая - к перемещению первого и последнего вагонов, соответственно, между станциями. Данная система уравнений содержит в себе решение – значение скорости поезда в момент времени t_3 : $v = v_0 + at_3$. Решать ее можно разными способами. Например, можно приравняв правые части третьего и четвертого уравнений системы и использовав условие задачи $t_2 = 2(t_3 - t_1)$, получить следующие соотношения для at_1 и at_2 :

$$at_1 = \frac{3at_3+2v_0}{5}, at_2 = \frac{4at_3-4v_0}{5} \quad \Leftrightarrow \quad at_1 = \frac{3v-v_0}{5}, at_2 = \frac{4v-8v_0}{5}.$$

Далее можно, например, умножив первое уравнение исходной системы слева и справа на n, приравнять правые части первого и третьего уравнений и подставить в полученное выражение полученные выше соотношения для $at_{1,2}$. После несложных преобразований получим квадратное уравнение для v:

$$v^2 + 24\frac{n+1}{9n-16}v_0 v - v_0^2 = 0,$$

из корней которого в качестве окончательного ответа выбираем тот, который имеет положительное значение:

$$v = \frac{\sqrt{225n^2+400}+12(n+1)}{16-9n}v_0.$$

Ответ: $$v = \frac{\sqrt{225n^2+400}+12(n+1)}{16-9n}v_0.$$

Критерии оценивания

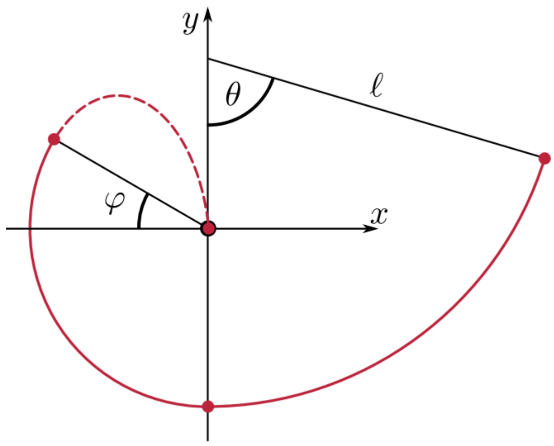
№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Определение ключевых событий, связанных с прохождением первого и последнего вагонов мимо станций	2
2	Получение системы кинематических уравнений	2
3	Записано выражение для скорости поезда в момент времени t_3	2
4	Получены соотношения для at_1 и at_2	2
5	Найдено значение скорости (1 балл) и указано, что оно положительное (1 балл)	2
	ИТОГО:	**10**

10-2. Маленький шарик подвешен на нити, длина которой ℓ. В точке O на расстоянии $\ell/2$ ниже точки подвеса в стену вбит гвоздь. Шарик отводят в сторону так, что нить отклоняется от вертикали на угол θ и отпускают без начальной скорости. Каким должен быть угол θ чтобы в процессе последующего движения шарик смог столкнуться с гвоздем?

Решение

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$



При проекции на радиальное направление в точке, где обнуляется сила натяжения:

$$ma_{\text{ц.с.}} = mg\sin(\varphi)$$

$$\frac{mv^2}{\ell/2} = mg\sin(\varphi) \Rightarrow v^2 = \frac{g\ell\sin(\varphi)}{2}$$

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне закрепления верхнего конца нити. Согласно закону сохранения энергии (ЗСЭ):

$$-mg\ell\cos(\theta)=\frac{mv^2}{2}-mg\Big(\frac{\ell}{2}-\frac{\ell\sin(\varphi)}{2}\Big)$$

Подставим в ЗСЭ значение v^2 из второго закона Ньютона:

Уравнения движения после перехода на баллистическую траекторию в проекциях на координатные оси Ox и Oy при условии попадания в гвоздь будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0=-\frac{\ell\cos\varphi}{2}+v_x t \ \Rightarrow\ t=\frac{\ell\cos\varphi}{2v\sin\varphi} \\ 0=\frac{\ell\sin\varphi}{2}+v_y t-\frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Подставим в уравнение движения вдоль оси Oy время полета, полученное из уравнения движения вдоль оси Ox :

$$0=\frac{\ell\sin\varphi}{2}+v\cos\varphi\frac{\ell\cos(\varphi)}{2v\sin(\varphi)}-\frac{g\ell^2\cos^2\varphi}{8v^2\sin^2\varphi}$$

$$0=\frac{1}{\sin(\varphi)}\ -\ \frac{g\ell\cos^2(\varphi)}{4v^2\sin^2(\varphi)}$$

$$0=1-\frac{2\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}\Rightarrow\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{2}$$

Найдем : $\sin\varphi$

$$\sin^2\varphi=\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\ \Rightarrow\ \sin^2\varphi=\frac{1}{3}$$

Подставив значение $\sin\phi$ в формулу для $\cos\theta$ получаем окончательный ответ задачи:

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\theta=\arccos\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad\Rightarrow\quad\theta\approx 86^\circ.$$

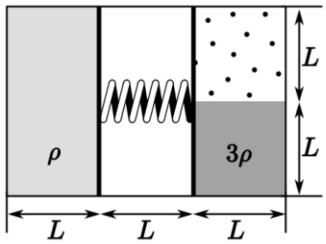
Ответ:

$$\theta=\arccos\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad\Rightarrow\quad\theta\approx 86^\circ.$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Найдены проекции уравнения второго закона Ньютона на радиальное направление, при котором сила натяжения равна нулю	2
2	Запись выражения ЗСЭ	2
3	Запись уравнений движения после перехода на баллистическую траекторию в проекциях на координатные оси Ox и Oy	2
4	Получение выражения для угла φ	2
5	Получение выражения для угла θ и запись числового ответа	2
	ИТОГО:	**10**

10-3. Прямоугольный сосуд шириной $3L$ и высотой $2L$ разделен на три герметичных равных части двумя легкоподвижными поршнями. Левая часть целиком заполнена некоторой жидкостью №1, а правая часть наполовину жидкостью №2, у которой плотность в три раза больше, чем у первой жидкости, а наполовину воздухом. В вакуумированной средней части сосуда закреплена напряженная пружина, при этом вся конструкция оказалась стабильной. Далее, в среднюю часть сосуда было добавлено еще две такие же пружины. При этом давление в верху левой части сосуда возросло в n = 14,5 раз, а правый поршень переместился на расстояние L / 3. Какова длина использованных пружин в ненапряженном состоянии (ответ запишите в единицах L)?



Решение

Запишем условия равновесия левого поршня при наличии одной и трех пружин в центральной части:

$$\begin{cases} k(L_0 - L) = (P + \rho g L)S \\ 3k(L_0 - 4L/3) = (nP + \rho g L)S. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: k - коэффициент жесткости пружин, L_0 - их длина в ненапряженном состоянии, P - исходное давление в верхней части левого отсека, S – площадь поршня. Исключив из этих уравнений P , получим следующее соотношение:

$$k\Big((n-3)L_0 - (n-4)L\Big) = (n-1)\rho g L S.$$

Аналогично запишем условия равновесия правого поршня:

$$\begin{cases} k(L_0 - L) = P_A S + \frac{1}{2}3\rho g L\frac{S}{2} \\ 3k(L_0 - 4L/3) = 3P_A S + \frac{1}{2}3\rho g\frac{3}{2}L\frac{3S}{4}S = 3P_A S + \frac{27}{16}\rho g L S, \end{cases}$$

где P_A - исходное давление воздуха в правй части сосуда. При записи второго уравнения системы учтено, что в случае наличия трех пружин объем воздуха уменьшился в три раза (из-за смещения поршня и подъема уровня жидкости) и, соответственно, его давление в три раза возросло. Исключив из уравнений последней системы P_A, получим второе уравнение, в которое входит $\frac{\rho g L S}{k}$ основной параметр задачи :

$$kL = \frac{9}{16}\rho g L S.$$

Из этих уравнений легко получить как ответ задачи в общем виде, так и в частном случае с заданным в условии значением параметра n = 14,5:

$$L_0 = \frac{25n - 52}{9n - 27}L = 3L.$$

Ответ: $L_0 = 3L.$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записаны условия равновесия левого поршня при наличии одной пружины.	2
2	Записаны условия равновесия правого поршня.	2
3	Получено второе уравнение, в которое входит основной параметр задачи.	2
4	Получен ответ задачи в общем виде.	2
5	Получен ответ при n = 14,5.	2
	ИТОГО:	**10**

10-4. У тел одинаковой массы, удельные теплоемкости зависят от температуры. Для первого тела $c_1 = c_0(1 + \alpha t)$, для второго тела $c_2 = c_0(1 - \alpha t)$. Тела нагрели до температур t_1 и t_2, соответственно, и привели в соприкосновение. Какая температура t_0 тел установится в итоге?

Решение

Так как удельные теплоемкости изменяются линейно, то можно брать средние значения теплоемкостей в интервале температур:

$$\begin{cases} \overline{c_1} = \frac{c_0}{2}\left(1 + \alpha t_1 + 1 + \alpha t_0\right) = \frac{c_0}{2}\left(2 + \alpha t_1 + \alpha t_0\right) \\ \overline{c_2} = \frac{c_0}{2}\left(2 - \alpha t_2 - \alpha t_0\right) \end{cases}$$

Общая энергия системы не меняется, следовательно, по закону сохранения энергии:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \overline{c_1} m \left(t_0 - t_1\right) + \overline{c_2} m \left(t_0 - t_2\right) = 0$$

Тогда

$$\frac{c_0 m}{2}\left(2+\alpha t_1+\alpha t_0\right)\left(t_0-t_1\right)+\frac{c_0 m}{2}\left(2-\alpha t_2-\alpha t_0\right)\left(t_0-t_2\right)=0$$
$$4t_0-2(t_1+t_2)-\alpha\left(t_1^2-t_2^2\right)=0$$

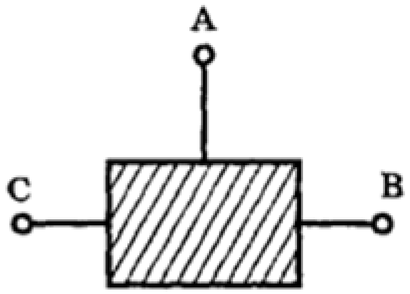
и $$t_0=\frac{2(t_1+t_2)+\alpha\left(t_1^2-t_2^2\right)}{4}$$

Ответ: $$t_0=\frac{2(t_1+t_2)+\alpha\left(t_1^2-t_2^2\right)}{4}$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Использование для расчета средних значений теплоемкостей, т.к. они меняются линейно в зависимости от температуры	2
2	Запись выражение для теплоемкостей	2
3	Запись выражения для полной энергии системы тел (ЗСЭ)	2
4	Получение окончательного уравнения для нахождения t_0	2
5	Запись ответа – выражение для t_0	2
	ИТОГО:	**10**

10-5. Черный ящик» имеет три клеммы: A, B, C (см. рисунок). Известно, что он содержит только резисторы. Сопротивления «черного ящика» при подключении к различным парам клемм: $R_{AB}=5$ Ом, $R_{BC}=8$ Ом, $R_{AC}=9$ Ом. Предложите схему «черного ящика», содержащую минимально возможное число резисторов.



Решение

Условию с тремя резисторами могут удовлетворять только две схемы, показанные на рисунках а и б. С двумя резисторами схем нет. Схема на рис.а при подключении к любой паре клемм представляет собой последовательное соединение двух резисторов.

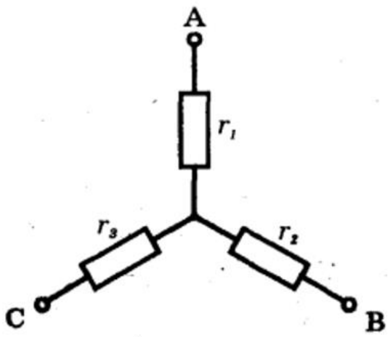


Рис.а к задаче 10-5

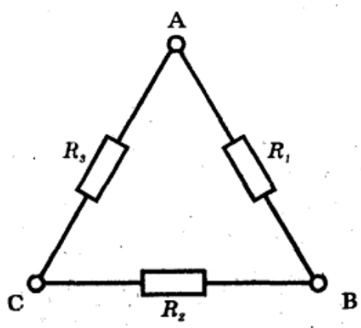


Рис. б к задаче 10-5

Поэтому $R_{AB} = r_1 + r_2$, $R_{AC} = r_1 + r_3$, $R_{BC} = r_2 + r_3$.

Отсюда

$$r_1 = \frac{R_{AB} - R_{BC} + R_{AC}}{2} = \frac{5\ \text{Ом} - 8\ \text{Ом} + 9\ \text{Ом}}{2} = 3\ \text{Ом}$$

$$r_2 = \frac{R_{AB} + R_{BC} - R_{AC}}{2} = \frac{5\ \text{Ом} + 8\ \text{Ом} - 9\ \text{Ом}}{2} = 2\ \text{Ом}$$

$$r_3 = \frac{R_{BC} + R_{AC} - R_{AB}}{2} = \frac{8\ \text{Ом} + 9\ \text{Ом} - 5\ \text{Ом}}{2} = 6\ \text{Ом}$$

Схема на рис. б при подключении к любой паре клемм представляет собой параллельное соединение одного из резисторов с двумя другими, соединенными между собой последовательно . Поэтому

$$R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}\ ; \qquad R_{BC} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}\ ; \qquad R_{AC} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Решив систему этих уравнений можно найти R_1, R_2иR_3. Например, складывая первые два и вычитая третье, получим

$$2R_1R_2 = (R_{AB} + R_{BC} - R_{AC})(R_1 + R_2 + R_3)$$

Аналогично получаем выражения

$$2R_2R_3 = (R_{AC} + R_{BC} - R_{AB})(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$2R_1R_3 = (R_{AB} + R_{AC} - R_{BC})(R_1 + R_2 + R_3)$$

Почленно разделив их друг на друга и подставив численные значения R_{AB}, R_{BC}и R_{AC}, найдём:

$$R_2 = 2R_1, \quad R_3 = 3R_1.$$

Подставив $R_2 = 2R_1$, $R_3 = 3R_1$ в любое из уравнений системы, получим

$$R_1 = 6\ \text{Ом}, R_2 = 12\ \text{Ом и}\ R_3 = 18\ \text{Ом}.$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Утверждение, что минимально возможное число резисторов три	1

2	Предложена схема на рис.a	1
3	Найдено $r_1 = 3$ Ом	1
4	Найдено $r_2 = 2$ Ом	1
5	Найдено $r_3 = 6$ Ом	1
6	Предложена схема на рис.б	1
7	Найдено $R_{AB} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$; $R_{BC} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$; $R_{AC} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}$	1
8	Найдено $R_1 = 6$ Ом	1
9	Найдено $R_2 = 12$ Ом	1
10	Найдено $R_3 = 18$ Ом.	1
	ИТОГО:	**10**