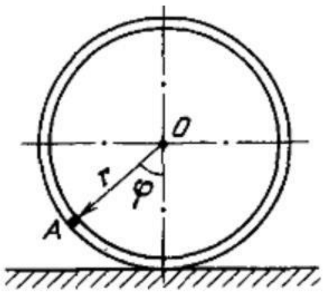
З А Д А Н И Я
II муниципального (районного) этапа
Всероссийской олимпиады школьников по физике 2024-2025
11 Класс

1. На покоящееся металлическое кольцо массой M и радиуса r нанизана бусина массой m, которая может двигаться по кольцу без трения. В начальный момент бусина находится в верхней точке кольца, поставленного на ребро, на горизонтальную плоскость. Трение между кольцом и плоскостью равно нулю В следующий момент бусина начала соскальзывать без начальной скорости. Какова будет скорость u центра кольца в момент, когда бусина соскользнёт до точки A**,** радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью. Ускорение свободного движения g.



Решение

Силы, действующие на систему обруч — шайба, — это сила тяжести и сила нормальной реакции со стороны плоскости. Обе эти силы направлены вдоль вертикали. Следовательно, центр масс системы в горизонтальном направлении не перемещается. Поскольку трение между обручем и плоскостью отсутствует, обруч движется поступательно. Согласно закону сохранения импульса, в любой момент времени

$$Mu_x + m\upsilon_x = 0, \tag{1}$$

где и u_x и υ_x — горизонтальные проекции скоростей центра обруча и шайбы. Так как υ_x периодически меняет знак, то и u_x также «синхронно» меняет знак. Общий характер движения обруча таков: шайба на участках BC и BE — центр обруча движется вправо; шайба на участках CD и DE — центр обруча движется влево (Рис.1).

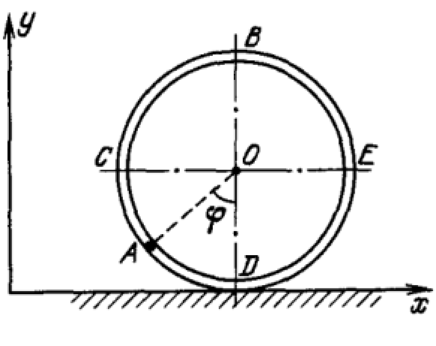


Рис.1

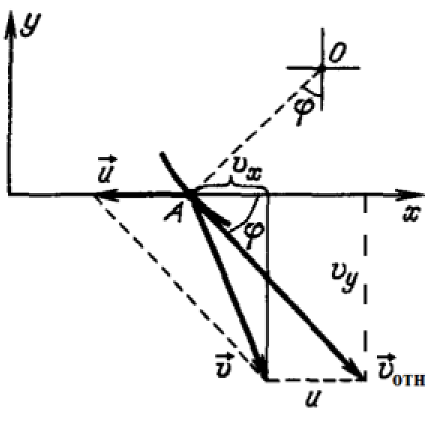


Рис.2

Скорости шайбы u и обруча υ связаны законом сохранения энергии:

$$Mgr + mg \cdot 2r = Mgr + mgr(1+\cos\varphi) + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2},$$

который приводится к следующему виду: $mgr(1-\cos\varphi) = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{Mu^2}{2}$ (2)

Движение шайбы относительно неподвижного наблюдателя можно представить в любой момент времени как суперпозицию двух движений: движения относительно центра обруча со скоростью $\vec{\upsilon}_{\text{отн}}$, направленной по касательной к обручу, и движения вместе с обручем со скоростью $\vec{u}$, направленной горизонтально. Таким образом, в соответствие с законом сложения скоростей, скорость шайбы $\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{\upsilon}_{\text{отн}}$ (рис. 2). Как видно из этого рисунка, $tg\varphi = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x + u}$ (3)

С учетом того, что в (2) $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$, (4)

решая совместно уравнения (1) – (4), после достаточно громоздких преобразований, найдем скорость центра обруча в тот момент, когда радиус-вектор точки, в которой находится шайба, составляет угол φ с вертикалью:

$$u = m\cos\varphi\sqrt{\frac{2gr(1+\cos\varphi)}{(M+m)(M+m\sin\varphi)}} \quad (5)$$

Примерные критерии оценивания	Баллы
Записан закон сохранения импульса (1)	3
Записан закон сохранения энергии (2)	1
Получено выражение для $tg\varphi$ (3)	2
Получено выражение для скорости шайбы u (5)	4

2. Космический корабль массой m попал в пылевое облако с переменной плотностью, которое создавало вязкое сопротивление движению пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности зависит от координаты тела x в направлении движения $\vec{f} = -\alpha(x) v\,\vec{v}$). Было замечено, что движение корабля стало равнозамедленным. Найти зависимость $\alpha(x)$, чтобы при любой начальной скорости, корабль вошедший в облако в точке $x = 0$, двигался равнозамедленно.

Так как тело движется вдоль оси x, то его ускорение, в соответствии со вторым законом Ньютона, равно $$a_x = \frac{f_x}{m} = -\frac{\alpha(x)}{m}\upsilon^2 \qquad (1)$$

Из условия задачи следует, что тело, пущенное в начальный момент времени из начала координат с начальной скоростью υ_0, движется равнозамедленно, т.е. $a_x = -a = \mathrm{const}$, поэтому координата тела x и его скорость υ_x зависят от времени t следующим образом:

$$x = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad \upsilon = \upsilon_0 - at \qquad (2)$$

Подставляя вторую формулу из (2) в (1), имеем: $$a = \frac{\alpha(x)}{m}\left(\upsilon_0 - at\right)^2 \qquad (3)$$

отсюда выражаем $$\alpha(x) = \frac{ma}{\left(\upsilon_0 - at\right)^2} = \frac{m}{\frac{\upsilon_0^2}{a} - 2\upsilon_0 t + at^2} \qquad (4)$$

Используя первую формулу в (2), выражение (4) можно записать через координату x:

$$\alpha(x) = \frac{m}{\frac{\upsilon_0^2}{a} - 2x} = \frac{m}{2\left(\frac{\upsilon_0^2}{2a} - x\right)} \qquad (5)$$

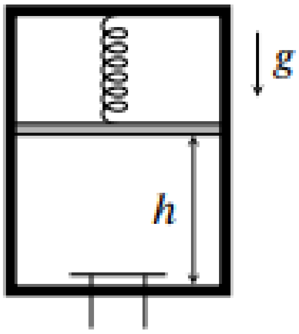
Таким образом, тело, пущенное из начала координат с произвольной скоростью υ_0, может двигаться равнозамедленно только тогда, когда зависимость $\alpha(x)$ имеет вид (5).

Здесь $\frac{\upsilon_0^2}{2a}$ является произвольным положительным числом, которое можно обозначить через $X = \frac{\upsilon_0^2}{2a}$, тогда зависимость (5) перепишется в виде: $$\alpha(x) = \frac{m}{2(X - x)} \qquad (6)$$

Заметим, что, в соответствие с уравнениями, описывающими равнозамедленное движение (2), величина X имеет смысл расстояния, которое проходит тело от начала координат до полной остановки, причем зависит X только от свойств среды.

Примерные критерии оценивания	**Баллы**
Записано выражение для ускорения тела как функции скорости (1)	1
Записаны уравнения (2)	1
Получено соотношение (3)	2
Получено выражение для $\alpha(x)$ как функция времени (4)	3
Получено выражение для $\alpha(x)$ как функция координаты (5) (или (6))	3

3. В вертикальном цилиндрическом теплоизолированном герметичном сосуде находится поршень массой m = 10 кг, прикреплённый с помощью невесомой пружины к его верхней стенке, а на дне сосуда расположен нагреватель. Сосуд находится в поле тяжести с ускорением свободного падения равным g = 10 м/с^2. Под поршнем находится одноатомный газ, а над поршнем — вакуум. В начальный момент поршень на высоте h = 80 см от основания, пружина не деформирована. Определите жёсткость пружины k, если после нагрева газа количеством теплоты Q =130 Дж, поршень поднялся на высоту h/4. Трением пренебречь.



Решение: В начальном положении давление газа под поршнем равно $p_0 = mg/S$, где S — площадь поршня. Если же в результате нагревания поршень поднялся на высоту $h/4$, давнение газа под ним стало $p = p_0 + kh/(4S)$, а объём газа $V = 5Sh/4$. Работа по подъёму поршня на высоту $h/4$ определяется как изменение потенциальных энергий поршня и пружины

$$A = \frac{mgh}{4} + \frac{kh^2}{32},$$

в то время как изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}(pV - p_0Sh) = \frac{3}{2}\left(\frac{p_0Sh}{4} + \frac{5kh^2}{16}\right) = \frac{3mgh}{8} + \frac{15kh^2}{32}.$$

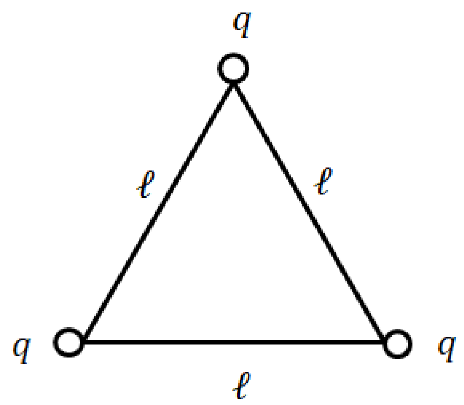
Отсюда получим, что

$$Q = \Delta U + A = \frac{5mgh}{8} + \frac{kh^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{h^2}\left(Q - \frac{5mgh}{8}\right) = 250 \text{ Н/м}.$$

Критерии оценивания.

Описано изменение давления и объема после нагрева	3балла
Найдено изменение внутренней энергии	3балла
Расчитана жесткость пружины	3балла
Числовой ответ	1балл

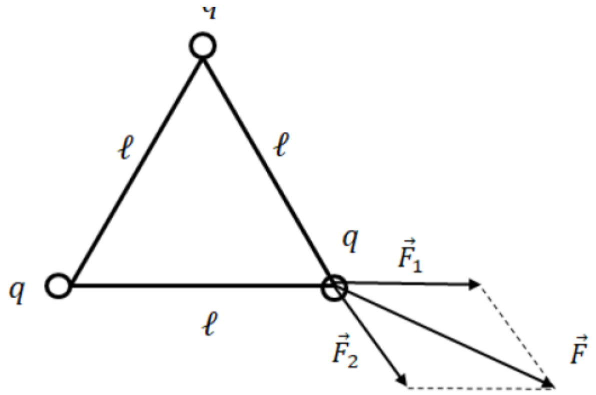
4. Три одинаковых шарика, каждый массой m и зарядом q , расположены вакууме космического пространства в далеке от массивных тел. Шарики связаны тремя непроводящими и нерастяжимыми нитями (рис), каждая длиной l. Нити перерезают в момент времени t=0. Какое будет ускорение шариков в момент времени t=0. Чему будет равен импульс любого шарика когда они удалились друг от друга на большие расстояние.



Поскольку все шарики находятся в одинаковых условиях, после пережигания нитей они будут иметь одинаковые ускорения. Второй закон Ньютона для одного из шариков:

$$ma = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0\ell^2},$$

откуда



$$a = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 m\ell^2}.$$

Так как шарики разлетаются на большие расстояния друг от друга, то потенциальной энергией шариков после разлета можно пренебречь. Закон сохранения энергии для каждого шарика имеет вид:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\ell} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

откуда

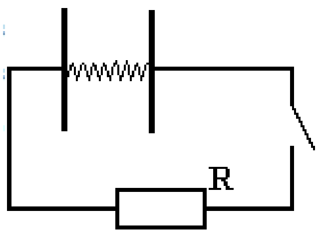
$$p = q\sqrt{\frac{m}{2\pi\varepsilon_0\ell}}.$$

Ответ: $a = \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 m\ell^2}$; $p = q\sqrt{\frac{m}{2\pi\varepsilon_0\ell}}$.

Примечание: допустимо в формулах использование коэффицента $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Критерии оценивания:

1.	Указано, что шарики находятся в одинаковых условиях	-	1
2.	Правильно записан 2 закон Ньютона	-	3
3.	Получен правильный ответ для ускорений шариков	-	1
4.	Правильно применен закон сохранения энергии	-	3
5.	Получен правильный ответ для импульсов шариков	-	2
	Всего	-	10



5. Экспериментатор Глюк решил провести опыт по превращению электрической энергии в тепловую. Он собрал схему из плоского конденсатора между пластинами которого разместил пружину жесткостью k, которая не проводит электрический ток. Площадь пластин S. В ненагруженном состоянии длина пружины L. Глюк зарядил конденсатор зарядом q. Затем медленно разрядил его через резистор R, замкнув ключ. Какая теплота выделится на резисторе?

Когда сообщили заряд конденсатору, пружина между пластин сжалась. Обозначим x – деформацию пружины. Пластина конденсатора находится в равновесии под действием кулоновской силы притяжения к другой пластине и силы отталкивания пружины:

$$kx = Eq,$$

где E – напряженность поля одной пластины, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, σ - поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора, $\sigma = q/S$.

Получаем: $kx = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0} = \frac{qq}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$.

Откуда деформация пружины в положении равновесия $x = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}$.

Расстояние между пластинами $d = L - x$.

Энергия, первоначально запасённая в конденсаторе:

$W_к = \frac{q^2}{2C}$.

Ёмкость плоского конденсатора:

$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{L-x}$.

Получаем: $W_к = \frac{q^2(L-x)}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 q^2}{2\varepsilon_0 kS \cdot 2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{4{\varepsilon_0}^2 kS^2}$.

Энергия, запасённая в пружине:

$W_{пр} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kq^4}{2 \cdot 4{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2} = \frac{kq^4}{8{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2}$.

При медленном разряде механические колебания в пружине не возбуждаются, поэтому на резисторе выделится как энергия, запасённая в конденсаторе, так и энергия пружины:

$$W = W_к + W_{пр} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{4{\varepsilon_0}^2 kS^2} + \frac{kq^4}{8{\varepsilon_0}^2 k^2 S^2} = \frac{q^2 L}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^4}{8{\varepsilon_0}^2 kS^2} .$$

Критерии оценивания.

Определено условие равновесия для пластины конденсатора	2 балла

Выражена деформация пружины в положении равновесия	1 балл
Записана ёмкость плоского конденсатора	1 балл
Получено выражение энергии, запасенной в конденсаторе с учетом его ёмкости	2 балла
Получено выражение энергии пружины с учетом ее деформации	2 балла
Выражена энергия, выделяемая на резисторе	2 балла