

1. «Источник работы»

В Чёрном море находится лодка, в которую погружён лёд массой 1 кг при температуре плавления. Найдите, какую максимально возможную работу можно получить, используя процесс таяния льда. Температура воды равна 27°C, температура льда 0°C, удельная теплота плавления льда равна $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Возможное решение:

- КПД идеальной тепловой машины, обладающей максимальным КПД, а значит, обеспечивающим максимум работы равен $\eta_{\max} = 1 - \frac{T_x}{T_H}$.
- С другой стороны, КПД можно определить так: $\eta_{\max} = 1 - \frac{Q_x}{Q_H}$
- Или так: $\eta_{\max} = \frac{A_{\max}}{Q_H}$
- Холодильником в этой тепловой машине будет лёд $\Rightarrow Q_x = \lambda m, m = 1 \text{ кг}$.
- Решая систему уравнений из пунктов 1-4, получим: $A_{\max} = \frac{T_H}{T_x} \lambda m \left(1 - \frac{T_x}{T_H}\right) = 33 \text{ кДж}$

Система оценивания задачи:

Написано выражение из п. 1 – **2 балла**

Написано выражение из п. 2 – **2 балла**

Написано выражение из п. 3 – **2 балла**

Написано выражение из п. 4 – **2 балла**

Найдено значение $A_{\max}$ – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Прав ли Галилей?»

Проводя эксперимент с разными шариками, сделанными примерно из одного сплава, спускающимися с нулевой начальной скоростью с жестяного жёлоба, Костя заметил, что разные шарики скатывались с разными ускорениями. Он решил, что ему дали просто «плохое оборудование», ведь Галилей, который спускал шарики с наклонной плоскости, всякий раз получал одно и то же ускорение. Рассчитайте ускорения шариков. Исходя из данных таблицы, покажите, как меняется ускорение шариков в зависимости от их массы. Как должно, теоретически, зависеть от массы шариков их ускорение? Предположите, почему такой результат получился в опыте?

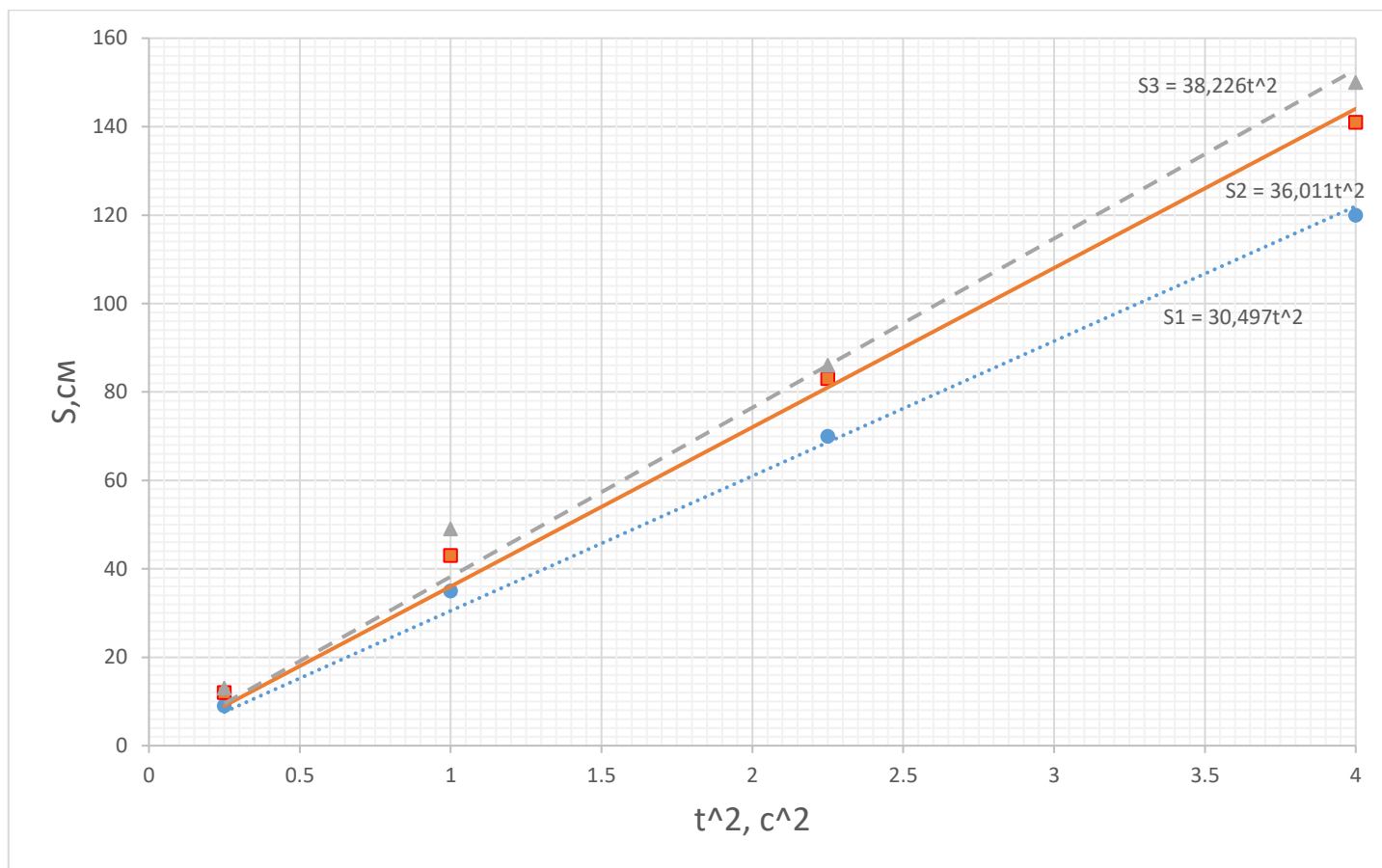
Момент инерции шара определяется по формуле $I = 0,4mR^2$.

$m_1, \text{г}$	$s_1, \text{см}$	$t_1, \text{с}$	$m_2, \text{г}$	$s_2, \text{см}$	$t_2, \text{с}$	$m_3, \text{г}$	$s_3, \text{см}$	$t_3, \text{с}$
17	9	0,5	66	12	0,5	131	13	0,5
	35	1,0		43	1,0		49	1,0
	70	1,5		83	1,5		86	1,5
	120	2,0		141	2,0		150	2,0

Возможное решение:

- Рассмотрим шарик, скатывающийся без проскальзывания с наклонной плоскости. Пусть на шарик действует только трение покоя, сила тяжести и нормальной реакции опоры.
- Второй закон Ньютона в проекциях на ось, направленную по ускорению центра масс (точки С), и ось, перпендикулярную наклонной плоскости, записывается так:
 $ох: mgsin\alpha - F_{\text{тр}} = ma_c; N - mgcos\alpha = 0$
- Основное уравнение динамики вращения для шара относительно центра масс:
 $\beta = \frac{M_{F_{\text{тр}}} + M_{mg} + M_N}{I} = \frac{M_{F_{\text{тр}}}}{0,4mR^2} = \frac{F_{\text{тр}}R}{0,4mR^2} = \frac{mgsin\alpha - ma_c}{0,4mR}$.
- Рассмотрим точку соприкосновения шара и наклонной. Т.к. нет проскальзывания, её скорость в СО-Земля всегда равна нулю и складывается векторно из скорости центра масс и линейной скорости вращения данной точки относительно центра масс. Следовательно, $v' = v_c \Rightarrow \Delta v' = \Delta v_c \Rightarrow$ тангенциальное ускорение крайних точек шара βR равно ускорению центра масс a_c .
- Решая пункты 3 и 4, получим $a_c = \frac{gsin\alpha}{1,4}$. То есть, ускорение шариков от их массы не должно зависеть.

6. Из уравнений движения получим, что путь, пройденный шариком определяется так: $S = \frac{a_c t^2}{2}$.
7. Построив графики $s_1(t_1^2)$, $s_1(t_2^2)$, $s_3(t_3^2)$, по углу наклона можно определить ускорения их центров: $a_{c1} = 61 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $a_{c2} = 72 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $a_{c3} = 76,5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.



8. Получается, что при увеличении массы шариков их ускорения растут.
9. Результат пункта 8 возможен из-за наличия силы трения качения, которая обратно пропорциональна радиусу шариков. Чем больше радиус, тем меньше трение качения. Ещё это возможно из-за того, что тяжёлые шарики деформируют жёлоб, из-за чего большие шарики приобретают большее ускорение, так как больше деформируют жёлоб.

Система оценивания задачи:

Рассмотрена модель движения шарика без трения качения по наклонной плоскости – **1 балл**

Доказано, что тангенциальное ускорение крайних точек шарика и ускорение центра масс равны – **1 балл**

Выражено ускорение центра масс шарика из п.5 – **1 балл**

Получено уравнение из п.6 – **1 балл**

Проведена графическая линейаризация зависимости пути шарика от времени путём построения графика $S(t^2)$ на миллиметровке:

На графике подписаны оси – **0,5 балла**

На осях графика указаны корректно числовые значения и размерность пути и квадрата времени в удобном масштабе (так, чтобы график занимал почти весь лист миллиметровой бумаги) – **0,5 балла**

На графике нанесены точки (точки не должны быть соединены ломаной линией) – **0,5 балла**

На графике проведена усреднённая прямая – **0,5 балла**

По графикам найдены ускорения:

С попаданием в 10% интервал от указанных в данном решении числовых значений – **2 балла**

ИЛИ

С попаданием в 15% интервал от указанных в данном решении числовых значений – **1 балл**

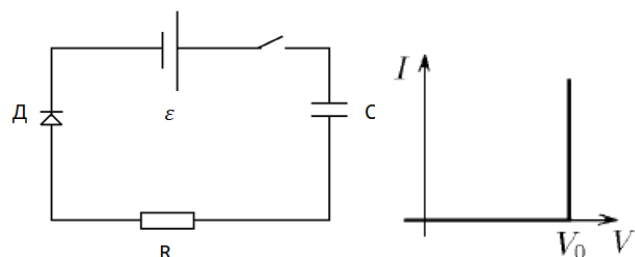
Показано, что при увеличении массы шариков ускорения тоже увеличиваются – **1 балл**

Приведены разумные причины, по которым опыт даёт противоположный теории результат – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «И снова нелинейные элементы»

В цепь присоединён нелинейный элемент (диод), вольт-амперная характеристика которого показана на графике. Считая конденсатор изначально незаряженным, найдите количество теплоты, которое выделится на сопротивлении после замыкания цепи. Емкость конденсатора равна C , ЭДС источника равна ε , сопротивление резистора R , напряжение, при котором диод открывается, равно U_0 .



Возможное решение:

1. Если $\varepsilon < U_0$, то зарядки не будет, следовательно, $Q = 0$.
2. Если $\varepsilon > U_0$, тогда $\varepsilon = U_0 + U_C \Rightarrow U_C = \varepsilon - U_0 \Rightarrow W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{q_C^2}{2C}$.
3. Работа источника идёт на зарядку конденсатора, выделение количества теплоты на резисторе и работу тока на диоде:
 $A = \varepsilon q_C = W_C + Q + A_d \Rightarrow Q = \varepsilon q_C - W_C - U_0 q_C$.
4. Решая систему уравнений, получим $Q = \frac{(\varepsilon - U_0)^2 C}{2}$

Система оценивания задачи:

Показано, что при $\varepsilon < U_0$ тока нет, $Q = 0$ – **2 балла**

Записано соотношение $\varepsilon = U_0 + U_C$ – **2 балл**

Записано $W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{q_C^2}{2C}$ – **2 балл**

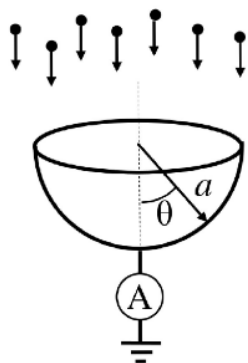
Записано $A = W_C + Q + A_d$ – **2 балла**

Получено выражение из п.4 – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

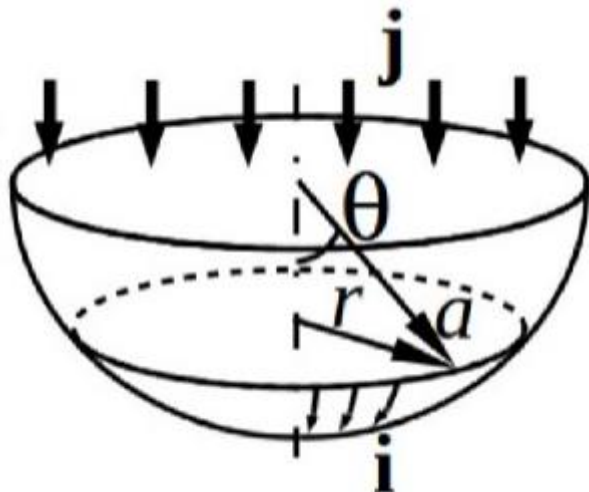
4. «Экспериментатор Федя»

Экспериментатор Федя взял чашу от электрометра и через амперметр заземлил. Затем направил на эту чашу поток заряженных частиц. Считая поток частиц однородным, показания амперметра равными I , а чашу - полусферой, найдите распределение поверхностных токов на чаше. Радиус полусферы считать равным a . Во сколько раз изменятся показания амперметра, если радиус сферы увеличить вдвое?



Возможное решение:

1. Ток, измеряемый амперметром, равен заряду, падающему в единицу времени на круг радиуса a .
2. Рассмотрим окружность радиуса $r = a \sin \theta < a$. Заряд, попадающий в единицу времени на полусферу за пределами этой окружности, равен току, протекающему через окружность:



$j(\pi a^2 - \pi r^2) = 2\pi r i(r)$, где j – плотность тока, $i(r)$ – поверхностный ток через окружность радиуса r .

$$3. \frac{I}{\pi a^2} (\pi a^2 - \pi a^2 \sin^2 \theta) = 2\pi a \sin \theta i(\theta) \Rightarrow i(\theta) = \frac{I \cos^2 \theta}{2\pi a \sin \theta}.$$

4. Из пункта 1 следует, что $I \sim \pi a^2 \Rightarrow$ показания амперметра увеличатся в 4 раза.

Система оценивания задачи:

Сказано утверждение из п.1 – **2 балла**

Получено выражение из п.2 – **3 балла**

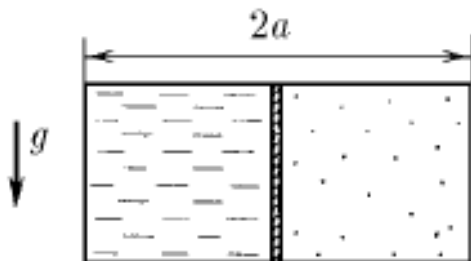
Получено выражение для поверхностных токов из п. 3 – **3 балла**

Показано, как и во сколько раз изменятся показания амперметра – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

5. «Смещение поршня»

В прямоугольном сосуде с непроницаемыми стенками находится слева тяжёлая жидкость, отделённая подвижным тонким поршнем от воздуха в правой части сосуда. В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объём сосуда пополам. На сколько сместится поршень вправо, если температура системы уменьшится в четыре раза? Тепловым расширением ртути и стенок сосуда пренебречь. Тепловым сжатием ртути и стенок сосуда пренебречь. Испарением ртути пренебречь. Трения нет. Длина сосуда $2a$.



Возможное решение:

1. Пусть поршень сместится вправо на x , а площадь поршня равна S . Тогда объём воздуха в правой части в начале равен $V = Sa$, а после смещения поршня $V' = S(a - x)$.
2. Уравнение состояния воздуха в начале и после смещения поршня можно записать так: $pV = \nu RT$ и $p'V' = \nu RT'$, где $T' = \frac{T}{4}$. Следовательно, $\frac{pV}{4} = p'V' \Rightarrow \frac{pa}{4} = p'(a - x)$.
3. Так как поршень находится в равновесии, можно сказать, что силы, действующие на него со стороны воздуха и ртути равны по величине. Следовательно, $p_{\text{ср}}h = ph$, $p'_{\text{ср}}h' = p'h$ где $p_{\text{ср}}$ – среднее гидростатическое давление ртути в начале, а $p'_{\text{ср}}$ – среднее гидростатическое давление ртути после смещения поршня.
4. Гидростатическое давление ртути неодинаково, но среднее давление на стенку можно определить графически из зависимости $p_{\text{рт}}(h) = \rho_{\text{рт}}gh$. Отсюда имеем $p'_{\text{ср}} = \frac{\rho_{\text{рт}}gh'}{2}$, $p_{\text{ср}} = \frac{\rho_{\text{рт}}gh}{2}$, где h – начальная высота столба ртути над дном сосуда, а h' – высота столба ртути над дном сосуда после смещения поршня.
5. Так как объём ртути при смещении поршня не изменился, можно сказать, что $h'(a + x) = ha$.
6. Из п. 2,3,4 получаем $\frac{\rho_{\text{рт}}gh'^2}{2} = \frac{\rho_{\text{рт}}gh^2}{2} * \frac{a}{4(a-x)}$.
7. Из пункта 5 получаем $\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{a^2}{(a+x)^2}$.
8. Решая систему уравнений из п.6,7, получаем: $x = (\sqrt{12} - 3)a$.

Система оценивания задачи:

Записано уравнение Клапейрона-Менделеева для состояния воздуха до и после смещения поршня из п.2 – **2 балла**

Записаны соотношения давлений ртути и воздуха из п.3 – **2 балла**

Вычислено среднее гидростатическое давление ртути до и после смещения поршня – **2 балла**

Написано соотношение из п.5 – **2 балла**

Получено значение смещения поршня – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов