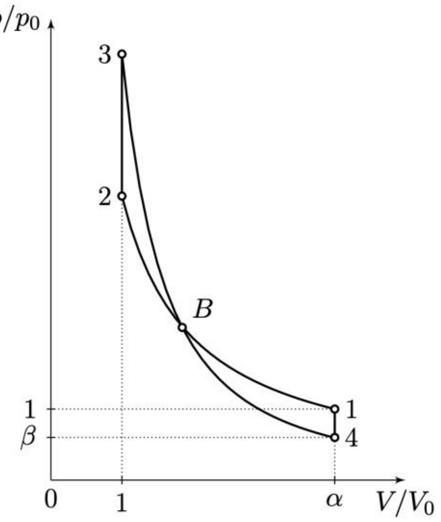
1. Безработица (Клепиков М.). Идеальный одноатомный газ участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изохор, изотермы и адиабаты. Графики процессов 1-2 и 3-4 пересекаются в точке B. Отношение объёмов на изохорах равно α. Известно, что КПД тепловой машины, работающей по данному циклу $\eta = 0$ %. p_0, V_0 — некоторые неизвестные постоянные значения давления и объёма газа.

1. Найдите β (см. рисунок).
2. Считая β известным (в независимости от того, решили первый пункт или нет), определите координаты точки B.



Примечания:

1. Работа ν моль идеального газа в изотермическом процессе расширения (или сжатия) от начального объёма $V_н$ до конечного $V_к$ при температуре T равна:
$$A_T = \nu RT \cdot \ln\frac{V_к}{V_н}.$$
2. Уравнение Пуассона для адиабатного процесса с одноатомным газом:
$$pV^{\frac{5}{3}} = \text{const}.$$

Возможное решение

Процесс 1-2 — изотермический, так как данная кривая медленнее возрастает при уменьшении объёма газа, а значит запишем закон Бойля-Мариотта:
$$p_2V_0 = p_0\alpha V_0 \Longrightarrow p_2 = \alpha p_0.$$
Процесс 3-4 — адиабатический, значит применим уравнение Пуассона:
$$p_3V_0^{\frac{5}{3}} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \Longrightarrow p_3 = \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0.$$
КПД цикла может быть равен нулю, если за цикл не совершается работа, а значит
$$\sum A_i = 0.$$
В изохорных процессах газ не совершает работу, поэтому
$$A_{12} + A_{34} = 0.$$
Работа газа в изотермическом процессе:
$$A_{12} = \nu RT_1 \cdot \ln\frac{V_0}{\alpha V_0}.$$
Согласно первому началу термодинамики
$$0 = \Delta U_{34} + A_{34} \Longrightarrow A_{34} = -\frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_3).$$
Запишем уравнения состояния идеального газа для точек 3 и 4, и вычтем их:

$$(3)\colon \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0 V_0 = \nu R T_3,$$
$$(4)\colon \beta p_0 \alpha V_0 = \nu R T_4,$$
$$\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right) = \nu R(T_4 - T_3).$$

Работа газа на адиабатном участке цикла:

$$A_{34} = -\frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right).$$

Работу газа в изотермическом процессе запишем, проведя замену $\nu R T_1$ на $p_0\alpha V_0$, согласно уравнению состояния в точке 1.

Просуммируем работы газа за цикл:

$$p_0\alpha V_0 \cdot \ln\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right) = 0,$$
$$\ln\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{2}\beta\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right),$$
$$\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}.$$

Для нахождения точки пересечения кривых составим уравнения зависимости давления от объёма каждой из них. Для этого воспользуемся значениями давлений и объёмов в точках на этих кривых:

$$pV = \alpha p_0 V_0 \implies p = \alpha p_0 V_0 \frac{1}{V},$$
$$pV^{\frac{5}{3}} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \implies p = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{V^{\frac{5}{3}}}.$$

Приравняем полученные функции и найдем координату пересечения V_B:

$$\alpha p_0 V_0 \frac{1}{V_B} = \beta p_0(\alpha V_0)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{V_B^{\frac{5}{3}}},$$
$$V_B^{\frac{2}{3}} = \beta\alpha^{\frac{2}{3}}V_0^{\frac{2}{3}},$$
$$V_B = \beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0,$$

А значит давление в этой точке:

$$p_B = p_0\beta^{-\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}$, $\left(\beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0; p_0\beta^{-\frac{3}{2}}\right)$.

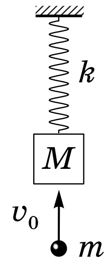
Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1.1	Обоснование сопоставления графиков кривых и процессов	1
1.2	Для изотермы показано, что $pV = \mathrm{const}$	0,5
1.3	$p_2 = \alpha p_0$	0,5
1.4	Правильно применено уравнение Пуассона	0,5
1.5	$p_3 = \alpha^{\frac{5}{3}}\beta p_0$	0,5
1.6	Аргументированный вывод о $\sum A_i = 0$	1
1.7	Работа газа в изотермическом процессе $A_{12} = \nu R T_1 \cdot \ln\frac{V_0}{\alpha V_0}$	0,5
1.8	Работа газа в изотермическом процессе $A_{12} = p_0\alpha V_0 \cdot \ln\frac{1}{\alpha}$	0,5
1.9	Использовано первое начало термодинамики для адиабатного процесса	1

1.10	Работа газа в адиабатном процессе $A_{34} = -\frac{3}{2}\alpha\beta p_0 V_0\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)$	0,5
1.11	Найден коэффициент $\beta = \frac{2\ln\frac{1}{\alpha}}{3\left(1-\alpha^{\frac{2}{3}}\right)}$	0,5
2.1	Идея поиска точки пересечение путем приравнивания функций давления. Оценивается при любом указании на этот способ	1
2.2	Изотерма: $p = \alpha p_0 V_0 \frac{1}{V}$	0,5
2.3	Адиабата: $p = \beta p_0 (\alpha V_0)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{V^{\frac{5}{3}}}$	0,5
2.4	Получен объём $V_B = \beta^{\frac{3}{2}}\alpha V_0$	0,5
2.5	Получено давление $p_B = p_0\beta^{-\frac{3}{2}}$	0,5

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Пуля (Савинцев В.). Брусок массой M висит на пружине жесткостью k. В начальный момент времени в него попадает летящая вертикально вверх пуля массой m и застревает в нем. Считайте, что удар происходит настолько быстро, что брусок за это время не успевает заметно сместиться. Известно, что брусок после соударения поднялся на x выше положения, при котором пружина ненатянута. Ускорение свободного падения g.



1. Определите, какая скорость v_0 была у пули в момент перед ударом.
2. Найдите потери энергии в процессе удара.
3. Найдите величину максимальной деформации пружины в процессе движения x_{max}.

Возможное решение

Запишем условие равновесия для бруска в момент до удара с пулей.

$kx_0 = Mg$, следовательно $x_0 = Mg/k$.

При условии, что удар происходит быстро, можем считать, что вдоль вертикали выполняется закон сохранения импульса (ЗСИ). Запишем ЗСИ с учетом, что после удара пуля и брусок будут двигаться, как одно целое.

$mv_0 = (M + m)V \Rightarrow V = mv_0/(M + m)$.

Далее в процессе движения будет выполняться закон сохранения механической энергии. Запишем его для перехода от начального положения к ситуации, когда брусок находится в высшей точке траектории.

$$E = E_0 \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = -(M+m)g(x+x_0) + \frac{m^2v_0^2}{2(M+m)}.$$

Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(M+m)}{m^2}\left(\frac{kx^2}{2} + (M+m)g\left(x + \frac{Mg}{k}\right)\right)}$$

Теперь найдем энергию, выделившуюся при столкновении:

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q + \frac{m^2 v_0^2}{2(M+m)} \Rightarrow Q = \frac{mMv_0^2}{2(M+m)}.$$

Запишем закон сохранения энергии при переходе от случая, когда тело находится в верхней точке траектории к моменту, когда пружина максимально растянута. В обоих случаях скорость бруска равна нулю.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = -(M+m)g(x + x_{\max}) + \frac{kx_{\max}^2}{2};$$

$$x_{\max} = \frac{(M+m)g}{k} \pm \frac{(M+m)g + kx}{k}.$$

Корень с минусом соответствует положению 1. Корень с плюсом — положению 2. Окончательно:

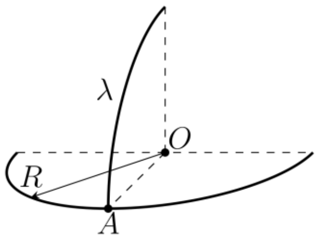
$$x_{\max} = \frac{2(M+m)g}{k} + x.$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано условие равновесия для бруска в момент до удара с пулей	1
2	Верно найдено начальное растяжение пружины x_0	1
3	Правильно записано ЗСИ	1
4	Правильно записано ЗСЭ	1
5	Найдено правильное выражение для v_0	1,5
6	Верное найдена энергия, выделившееся при столкновении	1,5
7	Правильно записан закон сохранения энергии при переходе от случая, когда тело находится в верхней точке траектории к моменту, когда пружина максимально растянута	1
8	Решено квадратное уравнение и найден $x_{\max}$	2

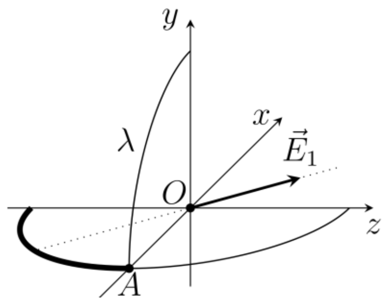
Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. Дуговая склейка (Юдин И.). Равномерно заряженную проволоку согнули в дугу полуокружности радиусом R и расположили в горизонтальной плоскости. К середине этой дуги в точке A, приклеили дугу в четверть окружности с тем же радиусом в вертикальной плоскости из той же проволоки, так что центры дуг совпадали в точке O (см рисунок). Линейная плотность заряда проволоки λ. Определите:



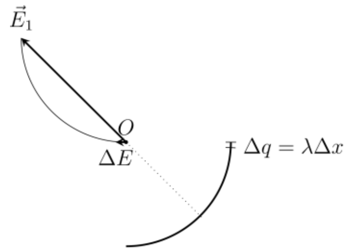
1. Угол вектора напряженности электрического поля в точке O к горизонтальной плоскости.
2. Модуль вектора напряженности электрического поля в точке O.

Возможное решение



Рассмотрим заряженную дугу в четверть окружности и поле, которое она создаёт в центре соответствующей окружности. В силу симметрии можно утверждать, что поле будет направлено в плоскости дуги по оси симметрии. На рисунке эта дуга в четверть окружности выделена более жирной линией, а создаваемое этой дугой поле обозначено вектором $\vec{E}_1$. Для дальнейшего рассуждения введём оси, тогда проекции вектора на оси $(E_1\cos(45°), 0, E_1\cos(45°))$. Для другой части заряженной дуги $(E_1\cos(45°), 0, -E_1\cos(45°))$. Для дуги в плоскости (x, y) поле будет $(E_1\cos(45°), -E_1\cos(45°), 0)$. Тогда суммарное поле: $(3E_1\cos(45°), -E_1\cos(45°), 0)$. Тангенс искомого угла $\mathrm{tg}(\alpha) = E_1\cos(45°)/(3E_1\cos(45°)) = 1/3$, тогда $\alpha = \mathrm{arctg}(1/3)$.

Модуль искомого вектора: $E_O = E_1\sqrt{9\cos^2(45°) + \cos^2(45°)} = \sqrt{\frac{10}{2}}E_1$.



Найдём модуль E_1. Для этого рассмотрим малую часть дуги длинной Δx, тогда заряд этой части $\Delta q = \lambda\Delta x$. В точке O создается поле величиной $\Delta E = \frac{k\lambda}{R^2}\Delta x$. Если мы рассмотрим другую часть окружности той же длины Δx, то в точке O эта часть создаст поле той же величины ΔE, только повёрнутой. Сумма всех этих полей будет направлена по дуге, длина этой дуги в пространстве полей будет пропорциональна длине дуги проволоки с коэффициентом $\frac{k\lambda}{R^2}$. Длина дуги $\frac{\pi}{2}R$, тогда длина дуги поля $l_E = \frac{k\lambda}{R^2}\frac{\pi}{2}R = \frac{k\pi\lambda}{2R}$. Суммарное поле – вектор E_1 – хорда, длина которой в $2\sqrt{2}/\pi$, т.е. поле четверти окружности $E_1 = \frac{k\sqrt{2}\lambda}{R}$, а само поле в точке О: $E_O = \frac{k\sqrt{10}\lambda}{R}$.

Критерии оценивания

№	**Критерий:**	**Баллы**
1.1	Разбиение конструкции на четверти окружности	1
1.2	Использованы идеи симметрии при нахождении направления поля от дуги в четверти окружности.	1
1.3	Найден угол между плоскостью и вектором: $\mathrm{arctg}(1/3)$ Если решение через интегрирование и ответ верный, то пункты 1.1 и 1.2 засчитывать за полный балл.	2
2.1	Нахождение модуля поля через поле дуги в четверть окружности $E_O = \sqrt{\frac{10}{2}}E_1$	2
2.2	Нахождение поля дуги четверти окружности $E_1 = \frac{k\sqrt{2}\lambda}{R}$	2
2.3	Найдено поле в точке О: $E_O = \frac{k\sqrt{10}\lambda}{R}$.	2
	Если решение через интегрирование и ответ верный, то пункты 2.1 и 2.2 засчитывать за полный балл.	

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. **Многоходовочка (Киреев А.).** Небольшое тело массой m и зарядом q располагается на горизонтальной шероховатой поверхности. Ему ударом в момент времени $t = 0$ сообщают начальную горизонтальную скорость v_0, в результате чего оно скользит по поверхности пока не остановится. Движение происходит в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ, ускорение свободного падения g.

Определите:

1) зависимость модуля скорости тела v от времени движения t;

2) время движения до остановки τ;

3) путь S, который пройдёт тело до остановки;

4) скорость тела v' сразу после прохождения первой трети пути $S/3$;

5) начальную угловую скорости вращения ω_0 вектора скорости тела;

6) модуль ускорения тела a_0 непосредственно сразу после удара;

7) зависимость угловой скорости вращения ω вектора скорости тела от времени t;

8) на какой угол φ_0 суммарно повернётся вектор скорости тела за время τ;

9) угол поворота φ' вектора скорости тела за первую половину всего времени движения;

10) какую работу $A_{\text{М}}$ совершат силы со стороны магнитного поля над телом на первой половине пути;

11) количество теплоты Q, выделившееся за всё время τ в результате движения тела по шероховатой поверхности.

Возможное решение

В процессе движения на тело действуют: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз; сила нормальной реакции опоры N, направленная вертикально вверх; сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, направленная против скорости движения; горизонтальная сила со стороны магнитного поля $F_{\text{М}} = |q|vB$, направленная перпендикулярно скорости.

Так как сила $F_{\text{М}}$ со стороны магнитного поля направлена всегда перпендикулярно скорости, то работы она не совершает, значит $A_{\text{М}} = 0$. Вся первоначальная кинетическая энергия тела к моменту остановки тела перейдёт в тепло: $Q = \frac{mv_0^2}{2}$.

Введём оси: $O\tau$, направленную всегда вдоль вектора скорости тела; On, направленную всегда горизонтально к центру кривизны траектории тела (перпендикулярно скорости тела); Oz, направленную вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на оси:

$$\begin{cases} 0 = N - mg; & \text{на ось } Oz \quad (1) \\ ma_\tau = -F_{\text{тр}}; & \text{на ось } O\tau \quad (2) \\ ma_n = F_{\text{М}}, & \text{на ось } On \quad (3) \end{cases}$$

где $a_n = \omega v = \frac{v^2}{R}$ – нормальное ускорение, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенциальное ускорение тела.

Из уравнений (1) и (2) получаем $ma_\tau = -\mu mg$. Откуда тангенциальное ускорение $a_\tau = -\mu g = const$, значит приходим к линейной зависимости от времени модуля скорости: $v = v_0 + a_\tau t = v_0 - \mu g t$. Пройденный путь l при движении с постоянным тангенциальным ускорением определяется по формуле: $l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_\tau} = \frac{v^2 - v_0^2}{-2\mu g}$. При $t = \tau$ скорость $v = 0$, путь $l = S$, значит $\tau = \frac{v_0}{\mu g}$, $S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$. После прохождения пути $l = \frac{S}{3}$ скорость $v = v'$, с учётом этого $\frac{v'^2 - v_0^2}{-2\mu g} = \frac{S}{3} = \frac{\frac{v_0^2}{2\mu g}}{3}$, следовательно $v' = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0$.

Из уравнения (3) с учётом формулы $a_n = \omega v$ получаем $m\omega v = |q|vB$, или $\omega = \frac{|q|B}{m} = const = \omega_0$, то есть угловая скорость не зависит от времени. Значит суммарный угол поворота от времени зависит линейно $\varphi = \omega t$. При $t = \tau$ угол $\varphi = \varphi_0$, откуда $\varphi_0 = \frac{|q|B}{m}\tau = \frac{|q|B}{m} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$. За первую половину времени движения угол поворота составит $\varphi' = \varphi_0/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|q|B}{m} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$.

Начальное ускорение $a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{|q|Bv_0}{m}\right)^2}$.

Ответы

а) $v = v_0 - \mu g t$;

б) $\tau = \frac{v_0}{\mu g}$;

в) $S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$;

г) $v' = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0$;

д) $\omega_0 = \frac{|q|B}{m}$;

е) $a_0 = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{|q|Bv_0}{m}\right)^2}$;

ж) $\omega = \frac{|q|B}{m}$;

з) $\varphi_0 = \frac{|q|v_0B}{\mu mg}$;

и) $\varphi' = \frac{|q|v_0B}{2\mu mg}$;

к) $A_М = 0$;

л) $Q = \frac{mv_0^2}{2}$.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано соотношение $F_М = |q|vB$ или эквивалентное	0,5
2	Записано соотношение $F_{тр} = \mu N$ или эквивалентное	0,5
3	Записано соотношение $0 = N - mg$ или эквивалентное	0,5
4	Записано соотношение $ma_\tau = -F_{тр}$ или эквивалентное	0,5
5	Записано соотношение $ma_n = F_М$ или эквивалентное	0,5
6	Записано соотношение $a_n = \omega v$ или эквивалентное	0,5
7	Получен аргументированный ответ на вопрос а) в виде $$v = v_0 - \mu g t$$	0,5
8	Получен аргументированный ответ на вопрос б) в виде $$\tau = \frac{v_0}{\mu g}$$	0,5
9	Получен аргументированный ответ на вопрос в) в виде $$S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$	0,5
10	Получен аргументированный ответ на вопрос г) в виде	1

	$$v' = \sqrt{\frac{2}{3}}v_0$$	
11	Получен аргументированный ответ на вопрос д) в виде $$\omega_0 = \frac{\lvert q\rvert B}{m}$$	0,5
12	Получен аргументированный ответ на вопрос е) в виде $$a_0 = \sqrt{(\mu g)^2 + \left(\frac{\lvert q\rvert B v_0}{m}\right)^2}$$	0,5
13	Получен аргументированный ответ на вопрос ж) в виде $$\omega = \frac{\lvert q\rvert B}{m}$$	1
14	Получен аргументированный ответ на вопрос з) в виде $$\varphi_0 = \frac{\lvert q\rvert v_0 B}{\mu m g}$$	0,5
15	Получен аргументированный ответ на вопрос и) в виде $$\varphi' = \frac{\lvert q\rvert v_0 B}{2\mu m g}$$	0,5
16	Получен аргументированный ответ на вопрос к) в виде $$A_{\text{М}} = 0$$	0,5
17	Получен аргументированный ответ на вопрос л) в виде $$Q = \frac{m v_0^2}{2}$$	0,5
	max	**10,0**

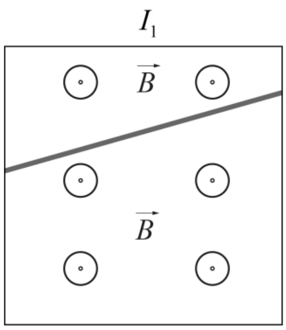
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. **Случайная перемычка (Кутелев К.).** Квадратная рамка сделана из однородного проводника с конечным сопротивлением. Две её противоположные стороны соединили перемычкой с пренебрежимо малым сопротивлением (см. рисунок). Полученные таким образом контуры поместили в однородное переменное магнитное поле. В некоторый момент времени в верхней ветке наблюдалась сила тока I_1 = 7 мА. При этом максимальная сила тока в системе в этот момент времени была $I_{\max}$ = 10 мА. Определите:

1) Силу тока в перемычке в этот момент времени $I_{\text{п}}$;

2) отношение величин ЭДС индукции в верхнем и нижнем контурах.



Возможное решение.

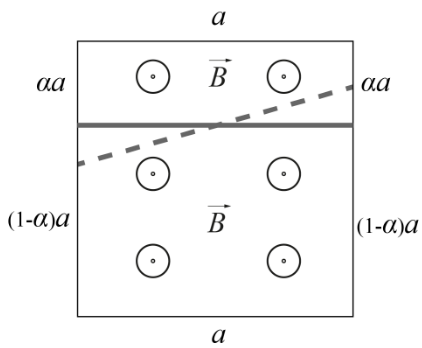
1) ЭДС индукции в контурах пропорционально их площади, так как поле однородное.

2) Сопротивление контуров пропорционально части периметра рамки входящей в соответствующий контур.

3) Направление тока (по/против часовой стрелки) везде в рамке одинаковое, а значит ток в перемычке равен разности токов верхней и нижней части рамки, и не может быть максимальным током в системе.

4) Значит $I_2 = I_{\max}$ = 10 мА, $I_{\text{п}}$ = 3 мА.

5) Заметим, что если развернуть перемычку так, как показано на рисунке, площади контуров не изменятся (а значит и ЭДС). Так же останутся теми же части периметра рамки входящие в соответствующий контур (а значит и сопротивление контуров, так как у перемычки сопротивления нет).



6) Обозначим за a длину стороны рамки, а за α - часть стороны квадрата, оставшуюся в первом контуре. Тогда

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{R_2}{R_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{3-2\alpha}{2\alpha+1} = \frac{7}{10}$$

$$6\alpha^2 - 23\alpha + 7 = 0$$

$$\alpha_1 = 3.5$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}$$

Так как $\alpha < 1$, то подходит только 1/3. Отношение ЭДС тогда $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$

№	Критерий	Балл
1	Записан закон электромагнитной индукции	1
2	Записано выражение для сопротивления контура, включающее его длину	1
3	$I_2 = I_{max} = 10$ мА	1
4	$I_п = 3$ мА	1
5	Записан закон Ома или правила Кирхгофа	1
6	Получено выражение связывающее соотношение токов с положением перемычки	3
7	Найдено отношение площадей контуров и, соответственно, отношение ЭДС индукции	2
	max	**10,0**

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.