

11 класс

Задача 11.1. Тело на клине.

С каким горизонтальным ускорением a нужно двигать клин, чтобы маленький брусок, находящийся на его поверхности (рис. 11.1), оставался относительно клина неподвижным? Угол при основании клина равен α ($\operatorname{tg} \alpha = 0,5$), коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0,2$. Сопротивление воздуха отсутствует. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

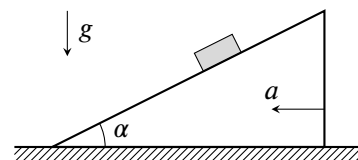


Рис. 11.1.

Ответ: $2,7 \text{ м/с}^2 < a < 7,8 \text{ м/с}^2$.

Решение: Пусть m — масса бруска. Перейдём в неинерциальную систему отсчёта клина и изобразим силы, действующие на брусок в этой системе: силу тяжести mg , фиктивную силу инерции ma , силу реакции опоры N и силу трения $F_{\text{тр}}$ (рис. 11.2). Последняя, для определённости, направлена вверх по поверхности клина. Запишем 2й закон Ньютона в данной системе отсчёта, спроектировав все силы на оси Ox (вдоль поверхности клина) и Oy (в перпендикулярном направлении):

$$0 = F_{\text{тр}} + ma \cos \alpha - mg \sin \alpha, \quad 0 = N - ma \sin \alpha - mg \cos \alpha.$$

Выражая отсюда $F_{\text{тр}}$ и N , получим

$$F_{\text{тр}} = m(g \sin \alpha - a \cos \alpha), \quad N = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha).$$

Брусок не движется по клину, если $-\mu N < F_{\text{тр}} < \mu N$. Следовательно,

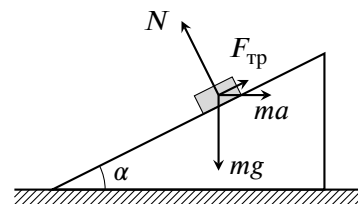


Рис. 11.2.

$$-\mu < \frac{F_{\text{тр}}}{N} < \mu \quad \Rightarrow \quad -\mu < \frac{g \sin \alpha - a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g \cos \alpha} < \mu \quad \Rightarrow \quad -\mu < \frac{g \operatorname{tg} \alpha - a}{a \operatorname{tg} \alpha + g} < \mu.$$

Решим получившиеся неравенства:

$$-\mu(a \operatorname{tg} \alpha + g) < g \operatorname{tg} \alpha - a \quad \Rightarrow \quad a < \frac{g(\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} = \frac{7g}{9} \approx 7,8 \text{ м/с}^2,$$

$$\mu(a \operatorname{tg} \alpha + g) > g \operatorname{tg} \alpha - a \quad \Rightarrow \quad a > \frac{g(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3g}{11} \approx 2,7 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда $2,7 \text{ м/с}^2 < a < 7,8 \text{ м/с}^2$.

Критерии:

- | | |
|---|-----------|
| 1) Правильно записан 2й закон Ньютона в проекции на одну из осей | 2 балла |
| 2) Правильно записан 2й закон Ньютона в проекции на другую ось | 2 балла |
| 3) Записано условие $ F_{\text{тр}} < \mu N$ или его аналог | 2 балла |
| 4) Найдена правильная верхняя граница возможных ускорений | 1,5 балла |
| 5) Найдена правильная нижняя граница возможных ускорений | 1,5 балла |
| 6) Записан ответ $2,7 \text{ м/с}^2 < a < 7,8 \text{ м/с}^2$ или его аналог | 1 балл |

Указания проверяющим:

- Во всех приведённых неравенствах различие между парами знаков: $<$ и $\leq$, $>$ и $\geq$, — считать физически несущественным.
- В пп. 1 и 2 второй закон Ньютона может быть записан как в инерциальной, так и в неинерциальной системе отсчёта.
- Участник может направить силу трения не вверх, а вниз по плоскости, что приведёт к систематическому изменению знака перед $F_{\text{тр}}$ во всех уравнениях (пп. 1 и 2). Это допустимо.
- Если вместо неравенства, необходимого в п. 3, указано, что может быть два направления для максимальной силы трения, баллы в п. 3 ставить.
- В пп. 4 и 5 числовые значения для ускорений необязательны.

Задача 11.2. Сбалансированная зарядка.

В цепи, изображённой на рис. 11.3, оба ключа разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1 , а затем, когда заряд на конденсаторе ёмкостью C станет равным $2C\mathcal{E}/3$, замыкают ключ K_2 . Определите сопротивление резистора R и ёмкость правого конденсатора C_0 , если после замыкания ключа K_2 токи через оба конденсатора одинаковы в каждый момент времени. Ёмкость левого конденсатора C , ЭДС батареи $\mathcal{E}$ и её внутреннее сопротивление r считайте известными.

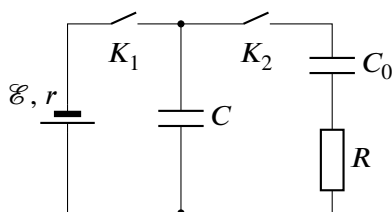


Рис. 11.3.

Ответ: $C_0 = C/3$, $R = 4r$.

Решение: Если после замыкания второго ключа токи через оба конденсатора одинаковы в каждый момент времени, то и заряды, перешедшие на конденсаторы от момента замыкания K_2 до прекращения зарядки, тоже должны быть равны. В установившемся режиме токи в цепи не текут, следовательно, напряжения на обоих конденсаторах равны $\mathcal{E}$, а заряды, соответственно,

$$q_{\text{уст } C} = C\mathcal{E}, \quad q_{\text{уст } C_0} = C_0\mathcal{E}.$$

Заряд, появившийся на левом конденсаторе с момента замыкания K_2 , составил $\Delta q_C = q_{\text{уст } C} - 2C\mathcal{E}/3 = C\mathcal{E}/3$. Поскольку он должен быть равен заряду на C_0 ,

$$\Delta q_C = q_{\text{уст } C_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{C\mathcal{E}}{3} = C_0\mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{C}{3}.$$

Рассмотрим теперь момент сразу после замыкания ключа K_2 . Заряд, бывший на конденсаторах до замыкания, не успел поменяться, но при этом в цепи обоих конденсаторов появился ток I , а через батарейку, соответственно, течёт ток $2I$. Напряжение на левом конденсаторе должно быть равно напряжению на резисторе R (конденсатор C_0 пока не заряжен):

$$2\mathcal{E}/3 = IR.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{E} = 2I \cdot r + 2\mathcal{E}/3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}/3 = 2Ir.$$

Отсюда найдём, что $R = 4r$.

Критерии:

- 1) Правильно найден заряд на конденсаторе C до замыкания K_2 0,5 балла
- 2) Правильно найдены заряды, установившиеся после замыкания K_2 1 балл
- 3) Идея о том, что изменение зарядов на обоих конденсаторах должно быть одинаковым 2 балла
- 4) Написано равенство для напряжений на одной паре параллельных ветвей в момент замыкания K_2 2 балла
- 5) Написано равенство для напряжений на другой паре параллельных ветвей в момент замыкания K_2 2 балла
- 6) Найдено, что $C_0 = C/3$ 1 балл
- 7) Найдено, что $R = 4r$ 1,5 балла

Указание проверяющим:

- 1) В пп. 4 и 5 равенства должны быть правильными и содержать силу тока, $\mathcal{E}$, R и/или r .
- 2) Если вместо равенств, указанных в пп. 4, 5, участник записал правильные уравнение/-ия в произвольный момент времени, для выставления баллов за эти пункты обязательно наличие формулы $I = q'$.
- 3) Если получен корректным способом верный ответ в п. 6, баллы за пп. 1-3 ставятся автоматически.

Задача 11.3. Дуговой процесс.

Идеальный газ переходит из состояния A в состояние B в процессе, график которого изображён на рис. 11.4. В безразмерных координатах p/p_0 и T/T_0 , где p — давление газа, а T — его абсолютная температура, кривая AB представляет собой дугу окружности с центром на горизонтальной оси (в точке с абсциссой 5).

1. Определите минимальную и максимальную температуру в процессе AB , выразив их через параметр T_0 .
2. Найдите отношение максимального и минимального объёмов газа в процессе AB .

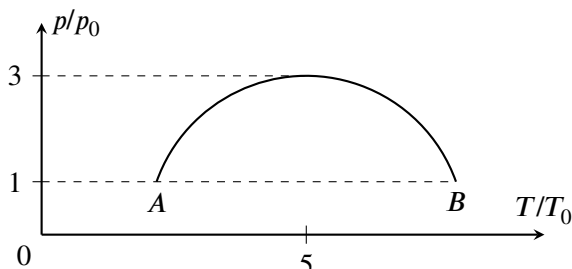


Рис. 11.4.

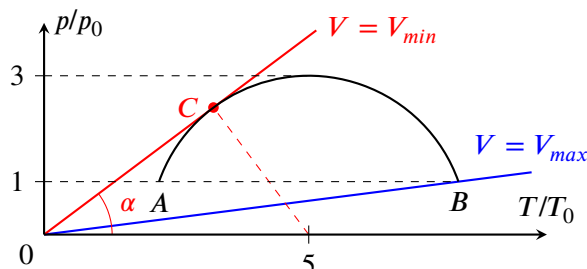


Рис. 11.5.

Ответ: 1) $T_{min} = (5 - 2\sqrt{2})T_0 \approx 2,17T_0$, $T_{max} = (5 + 2\sqrt{2})T_0 \approx 7,83T_0$; 2) $V_{max}/V_{min} = 3/4 \cdot (5 + 2\sqrt{2}) \approx 5,87$.

Решение: 1. Поскольку графиком процесса AB является окружность радиуса 3, минимальная и максимальная температуры (температуры в точках A и B соответственно) равны

$$T_{min} = T_A = T_0 (5 - \sqrt{3^2 - 1^2}) = T_0 (5 - 2\sqrt{2}) \approx 2,17T_0,$$

$$T_{max} = T_B = T_0 (5 + \sqrt{3^2 - 1^2}) = T_0 (5 + 2\sqrt{2}) \approx 7,83T_0.$$

2. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что объём газа пропорционален величине T/p . Поэтому, чтобы определить точки на кривой AB , в которых объём газа минимален и максимален, нужно из начала координат провести прямые, имеющие общие точки с AB и, соответственно, максимальный и минимальный угловой коэффициент (рис. 11.5). В результате получим, что максимальным объём газа будет в точке B , а минимальным — в точке C . В точке B отношение T/p равно $(T/p)_B = 7,83T_0/p_0$, а в точке C —

$$(T/p)_C = \frac{T_0}{p_0} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{3} = \frac{4T_0}{3p_0}.$$

Отсюда найдем отношение максимального и минимального объёмов:

$$\frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{(T/p)_B}{(T/p)_C} = \frac{3}{4} \cdot 7,83 \approx 5,87.$$

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Найдено правильное значение T_{min} | 1 балл |
| 2) Найдено правильное значение T_{max} | 1 балл |
| 3) Предложен правильный способ определения точек с минимальным/максимальным объёмом | 2 балла |
| 4) Найдено, что объём максимален в точке B | 1 балл |
| 5) Правильно найдена точка минимального объёма | 2 балла |
| 6) Правильно найдено отношение T/p в точке B | 1 балл |
| 7) Правильно найдено отношение T/p в точке C | 1 балл |
| 8) Найдено, что $V_{max}/V_{min} \approx 5,87$ | 1 балл |

Указание проверяющим:

В пп. 6 и 7 могут быть записаны выражения, пропорциональные T/p . Если они верные, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 11.4. По материалам ЕГЭ.

Из начального положения, находящегося на высоте $3R/4$ (см. рис. 11.6), по поверхности гладкой сферической полости радиуса R скользит маленькая шайба.

1. Определите полное ускорение шайбы в нижней точке полости.
2. Определите, на какой высоте h_1 относительно нижней точки полости полное ускорение шайбы равно по величине ускорению свободного падения g .
3. Определите, на какой высоте h_2 относительно нижней точки полости полное ускорение шайбы в процессе её движения будет минимальным.

Начальная скорость шайбы равна нулю. Сопротивление воздуха и трение отсутствуют.

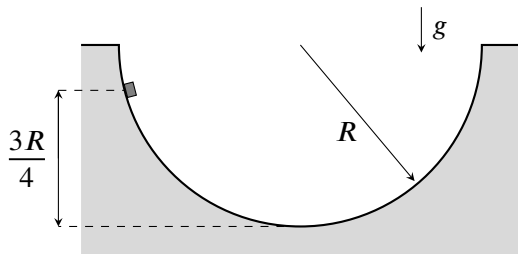


Рис. 11.6.

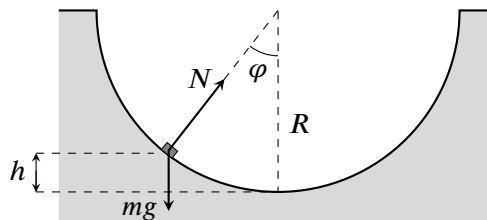


Рис. 11.7.

Ответ: 1) $3g/2$; 2) $h_1 = R/2$; 3) $h_2 = 2R/3$.

Решение: Пусть шайба имеет массу m и в некоторый момент находится на высоте h относительно нижней точки полости. Изобразим силы, действующие на неё — силу тяжести mg и силу реакции опоры N (рис. 11.7). Определим касательное ускорение шайбы:

$$ma_{\text{кас}} = mg \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad a_{\text{кас}} = g \sin \varphi = g \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} = g \sqrt{\frac{2h}{R} - \frac{h^2}{R^2}}.$$

Центростремительное ускорение шайбы найдём с помощью ЗСЭ:

$$mg \cdot \frac{3R}{4} = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = g \left(\frac{3R}{2} - 2h \right) \quad \Rightarrow \quad a_{\text{ц.с.}} = \frac{v^2}{R} = g \left(\frac{3}{2} - \frac{2h}{R} \right).$$

Полное ускорение, в свою очередь, равно $a = \sqrt{a_{\text{кас}}^2 + a_{\text{ц.с.}}^2}$.

1. В нижней точке $h = 0$, следовательно, $a_{\text{кас}} = 0$, а $a_{\text{ц.с.}} = 3g/2$. Отсюда находим, что в этой точке $a = a_{\text{ц.с.}} = 3g/2$.
2. Пусть $a = g$. Тогда

$$g^2 = g^2 \left(\frac{2h}{R} - \frac{h^2}{R^2} \right) + g^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{2h}{R} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2h}{R} - \frac{h^2}{R^2} + \frac{9}{4} - \frac{6h}{R} + \frac{4h^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{5}{4} - \frac{4h}{R} + \frac{3h^2}{R^2}.$$

Найдём корни полученного уравнения: $h/R = 1/2$ и $h/R = 5/6$. Отбрасывая второй корень, поскольку высота не может быть выше $3R/4$, запишем, что $h_1 = R/2$.

3. Величина a^2 зависит от высоты h по закону:

$$a^2 = g^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{4h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} \right).$$

Найдём положение минимума этой функции, например, с помощью производной:

$$(9/4 - 4h/R + 3h^2/R^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 6h/R = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 2R/3.$$

Критерии:

- | | |
|---|-----------|
| 1) Найден правильный ответ на первый вопрос | 1 балл |
| 2) Записано, что $a_{\text{кас}} = g \sin \varphi$, или аналогичная формула | 1 балл |
| 3) Записан ЗСЭ ($mg \cdot 3R/4 = mgh + mv^2/2$ или аналог) | 1 балл |
| 4) Получено верное уравнение, позволяющее найти ответ на 2й вопрос | 1,5 балла |
| 5) Обоснованный отбор корней уравнения из пункта 4 | 1 балл |
| 6) Получено, что $h_1 = R/2$ | 1 балл |
| 7) Получено верное выражение для полного ускорения как функции одной переменной | 1 балл |
| 8) Реализован корректный способ нахождения минимума ускорения | 1 балл |
| 9) Получено, что $h_2 = 2R/3$ | 1,5 балла |

Указание проверяющим:

- 1) Если ЗСЭ записан только в частном случае (для ответа на первый вопрос), баллы за п. 3 не ставить.
- 2) В п. 8 должна быть правильно вычислена производная или верно найдена вершина параболы.

Задача 11.5. Полёты в полях.

Из ионной пушки Π с начальной скоростью v вылетают ионы и попадают в точку O на плоском экране $\mathcal{E}$, находящемся на расстоянии L от пушки. Когда в пространстве между пушкой и экраном включили однородное электрическое поле напряжённостью E , направленное вдоль плоскости экрана, ионы стали попадать на экране в точку M (рис. 11.8а). Затем электрическое поле выключили и включили однородное магнитное поле индукции B , направленное параллельно экрану и перпендикулярно вектору $\vec{E}$ (рис. 11.8б). Оказалось, что и в этом случае ионы попадают в точку M . Найдите скорость v , если расстояние $OM = r$. Плоскость экрана перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Влиянием гравитации пренебречь.

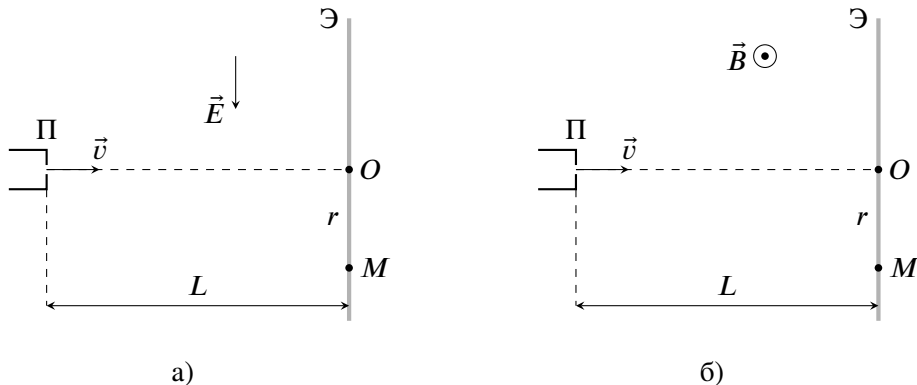


Рис. 11.8.

Ответ: $v = E/B \cdot L^2/(r^2 + L^2)$.

Решение: Пусть q — заряд иона, а m — его масса. По характеру отклонения иона в электрическом и магнитном полях делаем вывод, что $q > 0$. Рассмотрим первую ситуацию, когда вдоль поверхности экрана приложено электрическое поле E . В этом случае ускорение иона постоянно, направлено вниз (по рисунку) и равно qE/m . Пусть ион достиг экрана за время t . Тогда

$$L = vt, \quad r = \frac{qEt^2}{2m} \Rightarrow r = \frac{qEL^2}{2mv^2} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2v^2 r}{EL^2}.$$

Во втором случае ион под действием магнитного поля B движется с постоянной по модулю скоростью вдоль дуги окружности с центром в точке C (см. рис. 11.9). Найдём радиус R этой окружности

$$mv^2/R = qvB \Rightarrow R = mv/(qB).$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$(R - r)^2 + L^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2Rr + r^2 + L^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{r^2 + L^2}{2r}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{mv}{qB} = \frac{r^2 + L^2}{2r} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2rv}{B(r^2 + L^2)}.$$

Приравняв теперь правые части получившихся уравнений, получим выражение для скорости v :

$$\frac{2v^2 r}{EL^2} = \frac{2rv}{B(r^2 + L^2)} \Rightarrow v = \frac{E}{B} \cdot \frac{L^2}{r^2 + L^2}.$$

Критерии:

- | | |
|--|-----------|
| 1) Формула $L = vt$ или аналог | 0,5 балла |
| 2) Формула $r = qEt^2/(2m)$ или аналог | 1 балл |
| 3) Из формул в пп. 1 и 2 корректно исключено время | 2 балла |
| 4) Формула $R = mv/(qB)$ или аналог | 1 балл |
| 5) Записана правильная связь между R , r и L | 1,5 балла |
| 6) Из формул в пп. 5 и 6 корректно исключено R | 2 балла |
| 7) Получено, что $v = E/B \cdot L^2/(L^2 + r^2)$ | 2 балла |

Указание проверяющим:

В п. 5 достаточно записать формулу $(R - r)^2 + L^2 = R^2$.

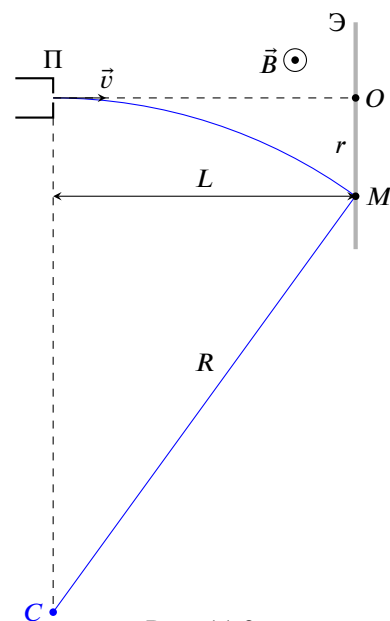


Рис. 11.9.