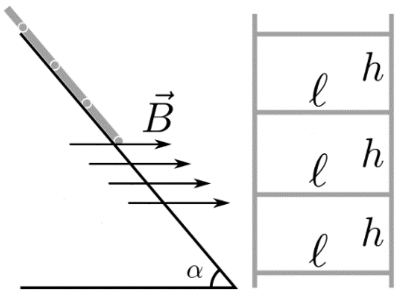
11 класс. Решения и критерии.

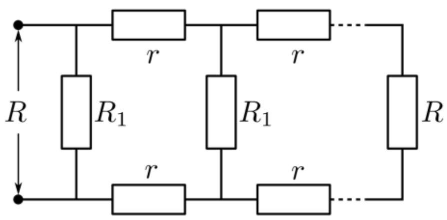
11-1. С наклонной плоскости может скатываться достаточно длинная пластина, в которую для жесткости вмонтирована стальная сетка (решетка) (см. рис.). Ширина сетки ℓ, расстояние между каждой парой ребер - h, а ребер в сетке очень много. Диаметр стержней, из которой сделана сетка равен d. Наклонная плоскость помещается в горизонтальное однородное магнитное поле с индукцией B. При скатывании на некотором участке пластина замедляется и начинает скользить с постоянной скоростью. Определите эту скорость. Удельное сопротивление стали ρ, масса пластины с сеткой равна M. Считать, что все упомянутые длины в системе удовлетворяют условию, что пластина начала скатываться с постоянной скоростью.



Решение

При движении в магнитном поле в образующих сетку контурах возникают индукционные токи, что и приводит к торможению из-за действия силы Ампера. Ускорение исчезает в тот момент, когда сила Ампера компенсирует проекцию силы тяжести на направление движения. Для нахождения токов необходимо знать сопротивление цепи и величину ЭДС индукции. Для вычисления сопротивления рассмотрим нашу конструкцию сверху. Данная решетка является электрической цепью, в которой r – сопротивление короткого проводника, соединяющее два поперечных проводника сопротивления R_1. В этом случае можно записать для сопротивлений участков:

$$r = \frac{\rho\ell}{\pi\,(d/2)^2}\,\frac{h}{\ell}, \quad R_1 = \frac{\rho\ell}{\pi\,(d/2)^2}.$$



Так как решетка очень длинная, то можно представить, что данная структура будет повторяться практически бесконечно, тогда:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2r+R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{R_1(2r+R)}{2r+R+R_1}$$

$$\Longrightarrow\ R\cdot 2r + R^2 + RR_1 = 2rR_1 + RR_1$$

$$R^2 + 2rR - 2rR_1 = 0.$$

Перепишем полученное квадратное уравнение для нахождения R, введя обозначение $\xi = h/\ell$, и решим его:

$$R^2 + 2\xi R_1 R - 2\xi R_1^2 = 0$$

$$R = -\xi R_1 + \sqrt{\xi^2 R_1^2 + 2\xi R_1^2} = \xi R_1 \left(\sqrt{1+\frac{2}{\xi}} - 1\right)$$

$$R = \rho\frac{h}{\pi(d/2)^2}\left[\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}} - 1\right].$$

Суммарное сопротивление интересующего нас контура будет равно $2r+2R$. Теперь разберемся с ЭДС индукции. Оно равно производной (приращению) от магнитного потока:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B\ell\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\sin\alpha.$$

Вычислив величину ЭДС, мы можем найти суммарный ток, который будет циркулировать в цепи $I_{\mathscr{E}}$:

$$I_{\mathscr{E}} = \frac{|\mathscr{E}|}{2R+2r} = \frac{B\ell v\sin\alpha}{2r+\frac{2\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)}.$$

Модуль силы Ампера может быть найдем суммированием по всем поперечным элементам решетки, находящимся в магнитном поле:

$$F_A = \sum_i I_i\ell_i B = B\ell\sum_i I_i = B\ell I_{\mathscr{E}}.$$

Так как сила тяжести направлена вертикально вниз, а сила Ампера вертикально вверх, то для равенства нулю их равнодействующей достаточно потребовать равенства их модулей:

$$Mg = \frac{B^2\ell^2 v\sin\alpha}{2r+\frac{2\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)}$$

Тогда получим окончательный ответ:

$$v = \frac{2Mg}{B^2\ell^2\sin\alpha}\left(r+\frac{\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)\right).$$

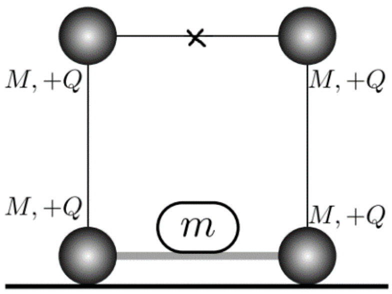
Ответ: $$v = \frac{2Mg}{B^2\ell^2\sin\alpha}\left(r+\frac{\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)\right).$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Описаны процессы, происходящие при движении пластины с сеткой	2
2	Получено выражение для сопротивления сетки, решено квадратное уравнение	2
3	Найдены ЭДС индукции и ток в цепи	2
4	Получено выражение критерия равномерного движения пластины	2

5	Найдено выражение для скорости равномерного движения пластины	2
	ИТОГО:	**10**

11-2. На рисунке представлена конструкция из четырех одинаковых заряженных шариков. Масса каждого шарика равна M, а заряд Q. Они все между собой связаны нитями, кроме двух нижних, которые соединены жесткой перекладиной очень малой массы. Нити и перекладина имеют одинаковую длину ℓ. Вся конструкция находится в вертикальной плоскости. Положив на перекладину груз, масса которого равна $m \ll M$, разрежем нить между двумя верхними зарядами. На какую максимальную высоту подлетит груз массой m? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g. Действием силы тяжести до момента отрыва груза от перекладины можно пренебречь.



Решение

Все шарики отталкиваются из-за кулоновских сил и в момент разрезания нити пытаются отдалиться друг от друга. Верхние при этом летят вниз, а нижние – вверх. Все силы (тяжести и кулона) в системе являются консервативными, поэтому можно воспользоваться законом сохранения энергии (ЗСЭ), учитывая то, что по условию задачи влиянием силы тяжести до момента отрыва груза можно пренебречь. Энергия электростатического взаимодействия между парами шаров, которые остаются непосредственно соединенными нитями не будет меняться, поэтому ее можно не учитывать при записи ЗСЭ, т.к. ее изменеие равно нулю. Энергия системы в начальной конфигурации (сразу же после разрезания нити):

$$E_0 = \frac{2kQ^2}{\sqrt{2}\ell} + \frac{kQ^2}{\ell},$$

где первое слагаемое в правой части относится к энергии взаимодействия пар шариков расположенных на диагоналях квадрата, а второе слагаемое – к энергии взаимодействия в верхней паре. При дальнейшем «распрямлении» данной конструкции расстояния в этих парах будут увеличиваться до момента, пока все четыре шарика не окажутся на одной горизонтальной прямой. В этот момент их скорости будут направлены вертикально, равны по модулю (вследствие сохранения полного импульса, т.к. в условии оговорено, что пока не учитываем влияние силы тяжести и пренебрегаем массой груза) и будут иметь максимальное значение. Заметим, что перекладина на которой находится груз, поднимется до высоты $\ell/2$. Затем конструкция начнет «складываться», скорости заряженных шариков будут уменьшатся, а груз, оторвавшись от перекладины, перейдет в свободный полет. Запишем выражение для полной энергии в момент отрыва груза:

$$E_2 = \frac{2kQ^2}{2\ell} + \frac{kQ^2}{3\ell} + 4 \cdot \frac{Mv^2}{2},$$

и приравняв $E_0 = E_1$, найдем квадрат стартовой скорости груза:

$$v^2 = \frac{kQ^2}{2M}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$$

Высоту подъема над точкой начала движения груза легко найти из закона сохранения энергии для груза $(mg\Delta h = \frac{mv^2}{2})$:

$$\Delta h = \frac{kQ^2}{4Mg}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$$

Сумма $\ell/2$ и Δh дает окончательный ответ задачи.

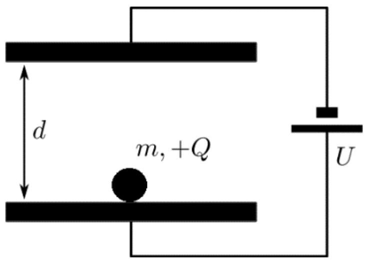
$$h_{max} = \frac{\ell}{2} + \frac{kQ^2}{4Mg}\left(\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\right).$$

Ответ: $h_{max} = \frac{\ell}{2} + \frac{kQ^2}{4Mg}\left(\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\right).$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Верно описано движение тел в начальный момент при разрезании нити	2
2	Найдена энергия взаимодействия шариков в начальном состоянии	2
3	Описан процесс трансформации конструкции	2
4	Найдено выражение для полной энергии в момент отрыва груза, начальная скорость груза и высота груза над начальным его положением	2
5	Приведен окончательный ответ	2
	ИТОГО:	**10**

11-3. Достаточно маленький по размеру металлический шарик массы m совершает периодическое движение между двумя обкладками плоского конденсатора в направлении перпендикулярном к ним. На обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов U, расстояние между ними d. При ударе шарик теряет половину своей скорости и приобретает заряд Q того же знака, что и заряд обкладки. Каков период движения этого шарика? (влиянием силы тяжести можно пренебречь).



Решение

Расстояние d, проходимое между столкновениями с обкладками, может быть найдено как произведение средней скорости движения на время перемещения t:

$$d = \frac{v + v/2}{2} t = \frac{3}{4} vt.$$

С другой стороны, величина ускорения $a = F/m$ шарика определяет величину изменения скорости за то же самое время:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v/2}{t} = \frac{v}{2t},$$

где E = U/d - напряженность электрического поля между пластинами конденсатора. Исключая из представленных соотношений значение максимальной скорости шарика и учитывая, что период движения равен $T = 2t$ получаем:

$$T = \sqrt{\frac{8md^2}{3QU}}.$$

Ответ: $$T = \sqrt{\frac{8md^2}{3QU}}.$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Найдено выражение для расстояния, проходимого между столкновениями с обкладками	2
2	Найдено выражение для ускорения шарика.	2
3	Найдено время.	2
4	Записано, что период движения равен $T = 2t$.	2
5	Получено выражение для периода	2
	ИТОГО:	**10**

11-4. В собранный ледогенератор кубкового льда поступает вода практически нулевой температуры ($t_1 = 0$°C). Известно, что температура помещения, где работает ледогенератор равна t_2. Мощность двигателя, на котором собран данный ледогенератор равна P. Какое максимальное количество кубиков он может произвести за время τ, если длина ребра каждого кубика ℓ? Удельная теплота плавления льда λ.

Решение

По условию задачи ледогенератор собран на основе двигателя, значит, при помощи двигателя собрана холодильная машина. Работа, производимая двигателем, расходуется на отвод тепла от поступающей в генератор воды нулевой температуры, что и будет приводить к образованию льда. Чтобы количество кубиков было бы максимальным, то в качестве цикла нам необходимо взять холодильный цикл Карно.

Если Q^{-} – количество теплоты, забираемое у воды за время τ, то:

$$\frac{A_{\text{внешн}}}{Q^{-}} = \frac{P \cdot \tau}{Q^{-}} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad \Longrightarrow$$
$$Q^{-} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} P\tau,$$

где $T_1 = t_1 + 273°C$, $T_2 = t_2 + 273°$ С – абсолютные температуры (по шкале Кельвина) воды и воздуха, соответственно. С другой стороны, полное количество отведенного тепла определяет массу образовавшегося льда:

$$Q^{-} = m\lambda = \rho V\lambda = \rho N \ell^3 \lambda,$$

где ρ - плотность льда.

Из последних двух выражений получим выражение для вычисления максимального числа кубиков льда, получаемых данным ледогенератором:

$$N = \frac{P\tau}{\lambda\rho\ell^3} \cdot \frac{t_1 + 273\ °\mathrm{C}}{t_2 - t_1}.$$

Ответ: $N = \frac{P\tau}{\lambda\rho\ell^3} \cdot \frac{t_1 + 273\ °\mathrm{C}}{t_2 - t_1}.$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Написано, что ледогенератор – собранная на основе двигателя холодильная машина.	2
2	Максимальность числа производимых кубиков льда требует, чтобы машина работала по циклу Карно.	2
3	Найдено количество теплоты, забираемое у воды за определенное время.	2
4	Указано, что количество теплоты, забираемое у воды за определенное время, идет на образование льда	2
5	Получено выражение для определения количества кубиков льда.	2
	ИТОГО:	**10**

11-5. При движении магнита вдоль листа металла на него действует тормозящая сила F, зависящая от скорости движения магнита (см. рис.1). Движение магнита быстро выходит на установившийся режим, и скорость почти не меняется. Экспериментатор измерил зависимость

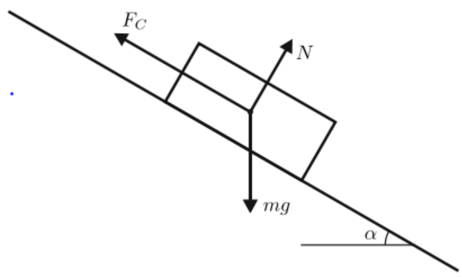


Рис. 1 к задаче 11-5

установившейся скорости движения магнита по наклонной полосе металла от угла наклона плоскости α. и построил график 1 этой зависимости (рис. 2). Затем определил массу магнита m = 2.95 ± 0.01 г. Так как кроме магнитного торможения, на магнит действует также и обычная сила трения, чтобы можно было учесть силу трения, экспериментатор сначала измерил коэффициент трения магнита о металл $\mu = \tan \alpha_{кр} =$ $0{,}178 \pm 0{,}003$. Используя выше приведенные данные, рассчитайте зависимость силы магнитного торможения, действующей на магнит, от скорости его движения вдоль полосы металла. Постройте график получившейся зависимости и предложите закон, её описывающий.

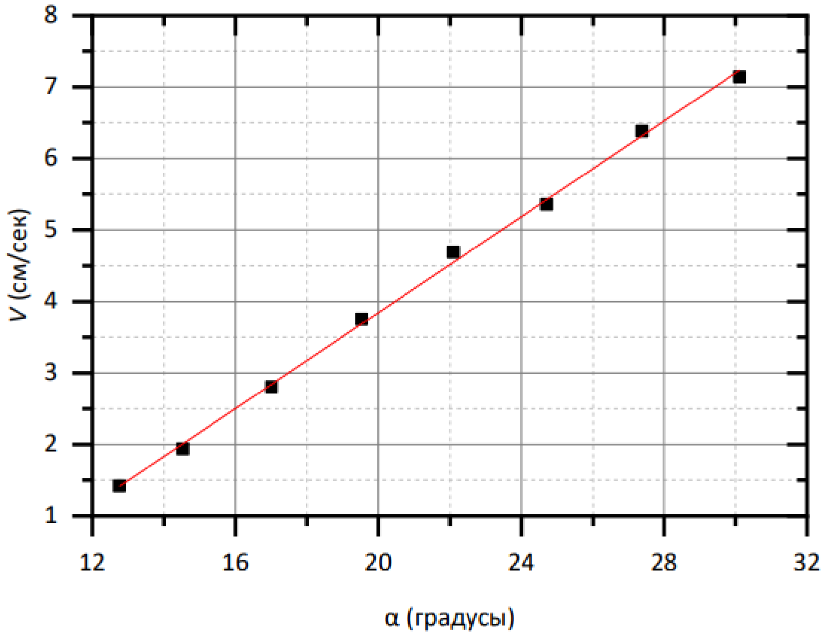


Рис. 2 к задаче 11-5

Решение

Во время движения в установившемся режиме равнодействующая сил, действующих на магнит, равна 0. Запишем это условие в проекциях

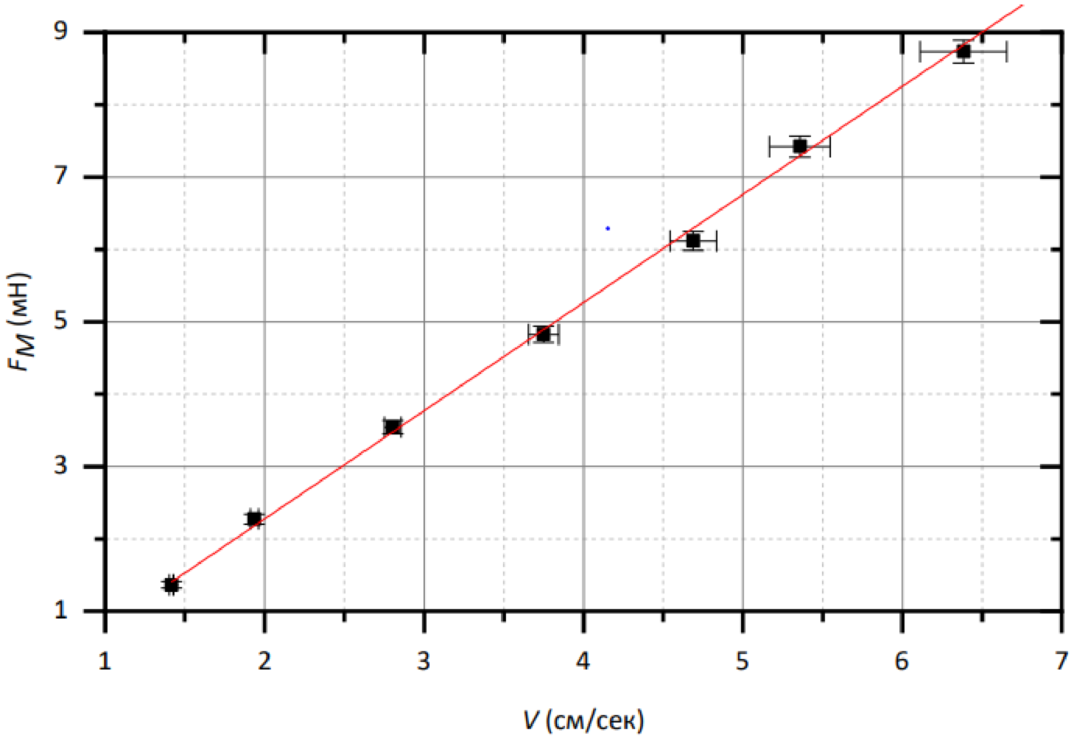
$$N = mg\,cos\alpha\,, \;\; F_C = F_М + F_{тр} = mg\,sin\alpha,$$

где N – сила реакции опоры, F_C – полная сила сопротивления, $F_М$ – сила магнитного торможения, $F_{тр}$ – сила сухого трения.

Так как $F_{тр} = \mu N$, то

$$F_М = mg\,(sin\alpha - \mu cos\alpha) \qquad (1)$$

Зная μ, для каждого угла наклона по формуле (1) рассчитываем $F_М$ силу магнитного торможения как функцию угла наклона плоскости α. Используя график 1, пересчитываем зависимость силы $F_М$ силу магнитного торможения как функцию угла наклона плоскости α в зависимость силы магнитного трения $F_М$ от скорости движения магнита v. Зависимость силы магнитного трения $F_М$ от скорости движения магнита v показана на графике ниже.



Как видно из графика зависимость – прямая пропорциональность.

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Утверждение, что во время движения в установившемся режиме равнодействующая сил, действующих на магнит, равна 0	1
2	Получено $F_C = F_М + F_{тр} = mg\ sin\alpha$	2
3	Получено $F_М = mg\ (sin\alpha - \mu cos\alpha)$	1
4	Рассчитана $F_М$ сила магнитного торможения как функцию угла наклона плоскости α для минимум шести значений угла α	2
5	Построен график зависимость силы магнитного торможения, действующей на магнит, от скорости его движения вдоль полосы металла	3
	Указано, что по графику зависимость – прямая пропорциональность	1
	ИТОГО:	**10**