

7 класс

**Задача 7.1. Книжный червь.**

Червячок Геннадий прогрыз насквозь стоящий на полке четырёхтомный физический справочник (расположение книг изображено на рис. 7.1). Общая толщина страниц каждого тома этого справочника равна 4 см, а толщина каждой обложки — 3 мм. Известно, что Геннадий прогрызает путь от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома за 12 мин, а путь от последней страницы третьего тома до первой страницы четвёртого — за 20 мин.

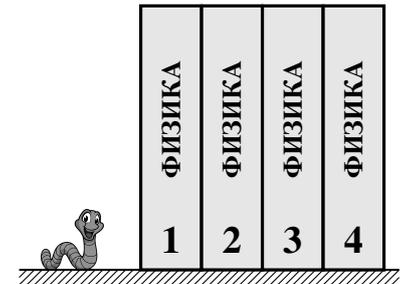


Рис. 7.1.

1. С какой скоростью  $v$  (в мм/мин) червячок грызёт обложку справочника?
2. С какой скоростью  $u$  (в мм/мин) Геннадий грызёт его страницы?
3. Найдите среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  прогрызания червячком всего пути сквозь тома справочника.

Считать, что червячок всё время движется по прямой перпендикулярно страницам, нигде не останавливается и не разворачивается. Скорости  $u$  и  $v$  прогрызания страниц и обложек постоянны и не зависят от номера тома.

**Ответ:** 1)  $v = 0,5$  мм/мин; 2)  $u = 10$  мм/мин; 3)  $v_{\text{ср}} \approx 2,9$  мм/мин.

**Решение:** Самое главное, что нужно понимать при решении этой задачи — где находятся первая и последняя страница каждого тома справочника (см. рис. 7.2).

Расстояние от первой страницы первого тома до последней страницы второго составляет две толщины обложки, а расстояние от последней страницы третьего тома до первой страницы четвёртого — 2 обложки и 2 толщины блока страниц в томе. Так как первый путь червячок прогрыз за 12 мин, то средняя скорость прогрызания обложки составила

$$v = \frac{2 \cdot 3 \text{ мм}}{12 \text{ мин}} = 0,5 \text{ мм/мин.}$$

Во втором случае траектория Геннадия проходит через два блока страниц и две обложки, причём на последние он тратит 12 мин. Отсюда следует, что скорость прогрызания страниц равна

$$u = \frac{2 \cdot 40 \text{ мм}}{20 \text{ мин} - 12 \text{ мин}} = 10 \text{ мм/мин.}$$

Весь путь Геннадия состоит из 8 обложек и 4 блока страниц. Средняя скорость червячка на всём пути равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{8 \cdot 3 \text{ мм} + 4 \cdot 40 \text{ мм}}{\frac{8 \cdot 3 \text{ мм}}{0,5 \text{ мм/мин}} + \frac{4 \cdot 40 \text{ мм}}{10 \text{ мм/мин}}} = \frac{184 \text{ мм}}{48 \text{ мин} + 16 \text{ мин}} \approx 2,9 \text{ мм/мин.}$$

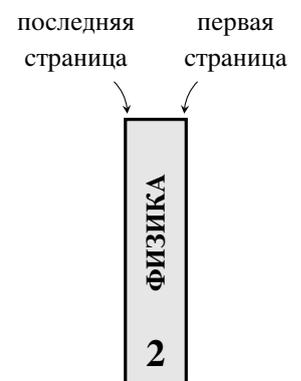


Рис. 7.2.

**Критерии:**

- 1) Есть понимание, где у книг, изображённых на рисунке, первая и последняя страницы . . . . . 0,5 балла
- 2) Найдено верное значение  $v$  . . . . . 2 балла
- 3) Правильно найдено время прогрызания блоков (одного, двух или более) . . . . . 1,5 балла
- 4) Найдено верное значение  $u$  . . . . . 2 балла
- 5) Найдено верное значение пройденного Геннадием пути (184 мм) . . . . . 1 балл
- 6) Найдено верное значение затраченного Геннадием времени (64 мин) . . . . . 1 балл
- 7) Найдено верное значение  $v_{\text{ср}}$  . . . . . 2 балла

*Указание проверяющим:*

- 1) Если за любой из пп. 2-7 у участника стоят баллы, балл за пункт 1 ставится автоматически.
- 2) Пункты 3, 5, 6 могут содержаться внутри соответствующих формул для  $u$  и  $v_{\text{ср}}$ .
- 3) Если за п. 4 поставлен полный балл, баллы за п.3 ставятся автоматически. Аналогично, если в п.7 поставлен полный балл, автоматически ставятся баллы за пп. 5 и 6.
- 4) Если ответ в пп. 2 и 4 (почему-то) дан не в мм/мин, а в других единицах, соответствующий пункт оценивается максимум в 1 балл.
- 5) В п. 7 ответ может быть дан в любых допустимых единицах.

**Задача 7.2. Дорога туда и обратно.**

Как-то раз экспериментатор Иннокентий Иванов поехал на своём автомобиле из Аистово в Ведёркино. Первую четверть своего пути он ехал со скоростью 60 км/ч, половину оставшегося пути — со скоростью 45 км/ч, а последний участок — со скоростью 66 км/ч. Обратный же путь из Ведёркино в Аистово у него занял на 25% больше времени, причём первую треть всего времени движения в обратную сторону Иннокентий ехал со скоростью 15 м/с. Какова была средняя скорость автомобиля на оставшейся части пути из Ведёркино в Аистово? Путь туда и обратно был одинаковым.

**Ответ:** 39 км/ч.

**Решение:** Пусть  $s$  — длина всего пути из Аистово в Ведёркино, тогда  $s/4$  — длина первого участка, а  $3s/8$  — длина второго и третьего. Найдём среднюю скорость на всём пути туда (из Аистово в Ведёркино):

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\frac{s/4}{60 \text{ км/ч}} + \frac{3s/8}{45 \text{ км/ч}} + \frac{3s/8}{66 \text{ км/ч}}} = \frac{1}{\frac{1}{240} + \frac{1}{120} + \frac{1}{176}} \text{ км/ч} = 55 \text{ км/ч}.$$

На обратный путь Иннокентий потратил на 25% больше времени, то есть время из Ведёркино в Аистово было равно

$$t_{\text{обр}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{s}{v_{\text{ср}}}.$$

Следовательно, средняя скорость на обратном пути была

$$v_{\text{ср обр}} = \frac{s}{t_{\text{обр}}} = \frac{4}{5} v_{\text{ср}} = 44 \text{ км/ч}.$$

Пусть скорость на заключительном участке пути из Ведёркино в Аистово, занявшем  $2/3$  времени движения в обратную сторону, равна  $u$ . Тогда

$$v_{\text{ср обр}} = \frac{54 \text{ км/ч} \cdot t_{\text{обр}}/3 + u \cdot 2t_{\text{обр}}/3}{t_{\text{обр}}} = \frac{54}{3} \text{ км/ч} + \frac{2}{3}u \Rightarrow \frac{2}{3}u = 44 \text{ км/ч} - 18 \text{ км/ч} = 26 \text{ км/ч} \Rightarrow u = 39 \text{ км/ч}.$$

**Критерии:**

- 1) Найдено, что второй и третий участки на пути из Аистово в Ведёркино равны  $3s/8$  . . . . . 1 балл
- 2) Записано верное выражение для средней скорости на пути из Аистово в Ведёркино . . . . . 2 балла
- 3) Найдено верное значение для средней скорости на пути из Аистово в Ведёркино . . . . . 2 балла
- 4) Записано верное выражение для средней скорости на обратном пути . . . . . 1,5 балла
- 5) Записана формула  $t_{\text{обр}} = 1,25s/v_{\text{ср}}$  или аналогичная . . . . . 1 балл
- 6) Найдено верное значение  $u$  . . . . . 2,5 балла

*Указание проверяющим:*

- 1) Выражение в п. 2 должно содержать только скорости на трёх участках и, возможно, несокращённую величину полного пути  $s$  (или аналогичную).
- 2) Выражение в п. 4 должно содержать только скорости на двух участках обратного пути и, возможно, несокращённую величину полного времени на обратный путь (или аналогичную).
- 3) В п. 5 достаточно написать, что  $v_{\text{ср обр}} = 0,8v_{\text{ср}}$ .
- 4) Если получено правильное значение  $u$ , баллы за все остальные пункты ставятся автоматически.

**Задача 7.3. Средняя скорость шляпы.**

Экспериментатор Иннокентий Иванов, гуляя по набережной реки, уронил в воду свою любимую шляпу, которая, подхваченная течением, поплыла от него прочь. Решив во что бы то ни стало вернуть свой головной убор, Иннокентий нашёл лодку, сел в неё и догнал шляпу ниже по течению. После чего, быстро подобрав её, он немедленно развернулся и приплыл в то же самое место, где взял лодку. Скорость течения реки и скорость движения лодки относительно воды всюду постоянны и равны  $u = 2$  м/с и  $v = 6$  м/с соответственно, а средняя скорость шляпы (относительно берега) на всём её пути по реке туда-обратно  $v_{\text{ср}} = 2,5$  м/с.

1. На каком расстоянии от места потери шляпы учёный нашёл лодку, если между моментом, когда он её уронил, и отплытием на лодке прошло  $t_0 = 5$  мин?

2. Выше или ниже по течению (относительно места потери) Иннокентий нашёл лодку?

Шириной реки можно пренебречь.

**Ответ:** 1) 240 м; 2) ниже по течению.

**Решение:** Пусть  $s$  — искомое расстояние между местом потери шляпы и лодкой. Будем считать, что  $s > 0$ , если лодка находилась ниже по течению реки, и  $s < 0$ , если она была выше по течению.

За время  $t_0$ , пока Иннокентий искал лодку, шляпа проплыла расстояние  $L = ut_0 = 600$  м. Найдём время погони за ней на лодке:

$$t_{\text{пог}} = \frac{L - s}{v} = \frac{600 \text{ м} - s}{6 \text{ м/с}} = 100 \text{ с} - \frac{s}{6 \text{ м/с}}.$$

В итоге, шляпа успела уплыть на расстояние

$$L_1 = L + ut_{\text{пог}} = 600 \text{ м} + 200 \text{ м} - s/3 = 800 \text{ м} - s/3.$$

Обратно Иннокентий вместе со шляпой двигался со скоростью  $v - u$ . Время на обратный путь составило

$$t_{\text{обр}} = \frac{L_1 - s}{v - u} = \frac{800 \text{ м} - 4s/3}{4 \text{ м/с}}.$$

Общее время «путешествия» шляпы равно, с одной стороны,

$$t_{\text{общ}} = \frac{2L_1 - s}{v_{\text{ср}}} = \frac{1600 \text{ м} - 5s/3}{2,5 \text{ м/с}},$$

а с другой стороны,  $t_{\text{общ}} = t_0 + t_{\text{пог}} + t_{\text{обр}}$ . Отсюда

$$\frac{1600 \text{ м} - 5s/3}{2,5 \text{ м/с}} = 300 \text{ с} + 100 \text{ с} - \frac{s}{6 \text{ м/с}} + \frac{800 \text{ м} - 4s/3}{4 \text{ м/с}} \Rightarrow s = 240 \text{ м}.$$

Так как получившееся значение положительно, лодка находилась ниже по течению от места потери шляпы.

**Альтернативное объяснение п.2:** На второй вопрос задачи можно ответить, не вычисляя  $s$ . Предположим, что лодка находилась прямо на месте, где улетела шляпа. Тогда средняя скорость шляпы на пути туда-обратно должна быть равна

$$v'_{\text{ср}} = \frac{2L_1}{L_1/(2 \text{ м/с}) + L_1/(4 \text{ м/с})} \approx 2,67 \text{ м/с}.$$

Так как данная в условии средняя скорость меньше этого значения, участок, когда Иннокентий вёз шляпу обратно (участок с большей скоростью), должен быть короче, а значит, лодка находилась изначально ниже по течению.

**Критерии:**

- 1) Записано верное выражение или верное значение для расстояния  $L$  . . . . . 0,5 балла
- 2) Записано выражение для времени погони  $t_{\text{пог}} = (L - s)/v$  . . . . . 1,5 балла
- 3) Записано выражение для максимального удаления шляпы от пристани  $L_1 = L + ut_{\text{пог}}$  или аналог . . . . . 1 балл
- 4) Указано, что полный путь шляпы равен  $2L_1 - s$  . . . . . 1 балл
- 5) Записано верное выражение для времени на обратный путь  $t_{\text{обр}} = (L_1 - s)/(v - u)$  . . . . . 1,5 балла
- 6) Записано верное уравнение, содержащее только  $s$  и заданные величины (или числа) . . . . . 1,5 балла
- 7) Найдено значение  $s$  . . . . . 2 балла
- 8) Дан обоснованный ответ на второй вопрос задачи . . . . . 1 балл

*Указания проверяющим:*

- 1) В пп. 2-7 знак перед  $s$  будет систематически отличаться от приведённого в авторском решении, если участник поместил лодку выше по течению. Если всё сделано корректно, баллы ставятся.
- 2) В пунктах 1-4 подстановка чисел и полученных ранее выражений не обязательна.
- 3) Выражения из пп. 1-5 критериев могут быть написаны сразу внутри уравнения из п. 6. В этом случае баллы за все правильно написанные формулы ставятся.
- 4) Обоснование в п. 8 может быть сделано любым корректным способом (например, одним из двух, приведённых в авторском решении). Если нет никаких следов обоснования, балл не ставить, даже в случае ответа, совпавшего с правильным!

**Задача 7.4. Чернила на графике.**

Мальчики Паша и Миша экспериментировали в школьной лаборатории. Они взяли пустой сосуд, имеющий вертикальные стенки и плоское дно, поставили на дно цилиндр и начали тонкой струйкой наливать в сосуд воду. Через некоторое время Паша вспомнил, что хотел поместить в сосуд не один, а два цилиндра, после чего он, не выключая воду, аккуратно поставил на дно сосуда второй цилиндр. Мише же было поручено снять зависимость высоты  $h$  уровня воды в сосуде от времени  $t$  и построить соответствующий график. Мальчик, в целом, справился с заданием, но в последний момент умудрился капнуть чернилами и залить часть построенного графика (см. рис. 7.3). Определите по графику:

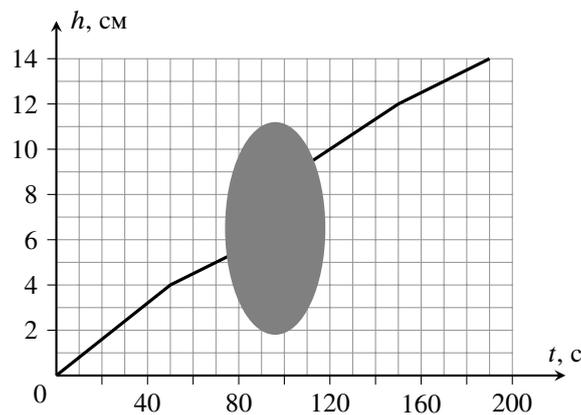


Рис. 7.3.

1. высоты первого и второго цилиндров,
2. площадь дна сосуда,
3. объёмы обоих цилиндров.

Мальчики помнили, что ежеминутно в сосуд поступало 72 мл воды, оба цилиндра стояли вертикально, а второй цилиндр Паша поставил очень быстро.

**Ответ:** 1) 4 см, 12 см; 2) 24 см<sup>2</sup>; 3) 36 см<sup>3</sup>, 72 см<sup>3</sup>.

**Решение:** 1. Рассмотрим график, приведённый в условии задачи. На первом участке вода поднимается на 4 см за 50 с, после чего скорость подъёма воды падает, и за следующие 20 с (до кляксы) уровень поднимается только на 1 см. Изменение скорости подъёма не может быть связано с постановкой на дно второго цилиндра (в этом случае она бы увеличилась, а не уменьшилась), значит, при  $h = 4$  см первый цилиндр оказался полностью под водой. На третьем участке (после кляксы) скорость поднятия уровня стала больше, чем на втором (2 см за 30 с), а на четвёртом снова вернулась к тому же значению, что и на втором участке. Из всего перечисленного можно сделать вывод, что высота первого цилиндра равна 4 см, а высота второго — 12 см.

**Альтернативный способ обоснования:** При погружении второго цилиндра уровень воды должен резко подняться, чего на видимой части графика нет. Значит, второй цилиндр Паша погрузил в сосуд в той части графика, которая находится под кляксой. А переломы графика соответствуют полному погружению цилиндров в воду. Поэтому  $h_1 = 4$  см,  $h_2 = 12$  см.

2. Так как на втором (и четвёртом) участках площадь поверхности воды равна площади дна сосуда  $S_0$ ,

$$S_0 \cdot 1 \text{ см} = 72 \text{ см}^3/\text{мин} \cdot 20 \text{ с} = 24 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad S_0 = 24 \text{ см}^2.$$

3. Найдём площади сечения обоих цилиндров  $S_1$  и  $S_2$ . Для это рассмотрим первый и третий участок графика:

$$(S_0 - S_1) \cdot 4 \text{ см} = 72 \text{ см}^3/\text{мин} \cdot 50 \text{ с} = 60 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad S_0 - S_1 = 15 \text{ см}^2 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 24 \text{ см}^2 - 15 \text{ см}^2 = 9 \text{ см}^2,$$

$$(S_0 - S_2) \cdot 2 \text{ см} = 72 \text{ см}^3/\text{мин} \cdot 30 \text{ с} = 36 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad S_0 - S_2 = 18 \text{ см}^2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 24 \text{ см}^2 - 18 \text{ см}^2 = 6 \text{ см}^2.$$

Отсюда найдём объёмы цилиндров:  $V_1 = 4 \text{ см} \cdot 9 \text{ см}^2 = 36 \text{ см}^3$ ,  $V_2 = 12 \text{ см} \cdot 6 \text{ см}^2 = 72 \text{ см}^3$ .

**Альтернативный способ нахождения  $S_2$ :** За 150 с в сосуд налилось  $72 \text{ см}^3/\text{мин} \cdot 150 \text{ с} = 180 \text{ см}^3$  воды. Кроме того, в сосуде находится первый цилиндр объёмом  $36 \text{ см}^3$ . Поэтому

$$(S_0 - S_2) \cdot 12 \text{ см} = 180 \text{ см}^3 + 36 \text{ см}^3 = 216 \text{ см}^3 \quad \Rightarrow \quad S_0 - S_2 = 18 \text{ см}^2.$$

**Критерии:**

- |   |           |
|---|-----------|
| 1) Найдена высота первого цилиндра (4 см)   | 0,5 балла |
| 2) Найдена высота второго цилиндра (12 см)  | 0,5 балла |
| 3) Приведено верное обоснование, что данные значения (4 и 12 см) — высоты цилиндров | 1 балл    |
| 4) Найдено верное значение $S_0$  | 2 балла   |
| 5) Найдено верное значение $S_1$  | 2 балла   |
| 6) Найдено верное значение $S_2$  | 2 балла   |
| 7) Найден объём первого цилиндра ( $36 \text{ см}^3$ )                              | 1 балл    |
| 8) Найден объём второго цилиндра ( $72 \text{ см}^3$ )                              | 1 балл    |

Указание проверяющим:

- 1) Если поставлены баллы за п. 7, то баллы за п. 5 ставятся автоматически. Аналогично, если поставлены баллы за п. 8, то баллы за п. 6 ставятся автоматически.
- 2) Если нет корректного обоснования в п. 3, остальные пункты оцениваются независимо.