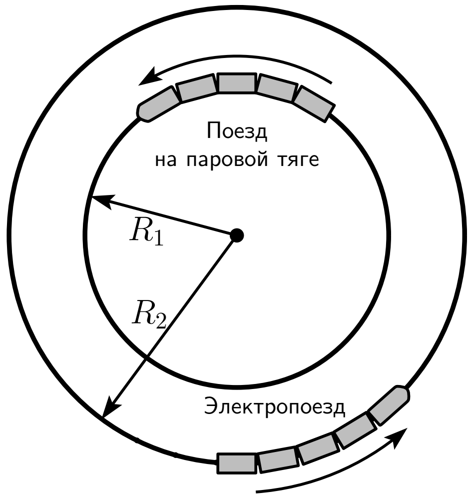
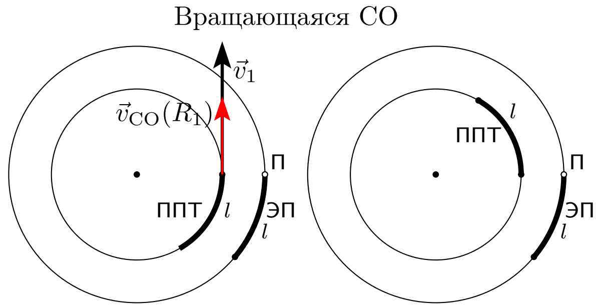
Задача 1. Поезда. В некоторой местности построены две замкнутые ветки железной дороги в виде окружностей, имеющих общий центр. Радиус внешней ветки в $k = 1{,}25$ раз больше радиуса внутренней. По внутренней ветке движется поезд на паровой тяге, а по внешней при этом в том же направлении едет электропоезд. Заскучавший пассажир электропоезда решил определить, за какое время его обгоняет поезд на паровой тяге. Он заметил, что от момента, когда ровно напротив его окна оказалось начало поезда на паровой тяге, до момента, когда напротив его окна оказался конец поезда, прошло $t_1 = 144$ с. Длины обоих поездов одинаковы и равны $l = 200$ м, при этом электропоезд движется со скоростью $v_2 = 50$ км/ч. 1) Определите скорость поезда на паровой тяге v_1. 2) За какое время t_2 мимо пассажира поезда на паровой тяге проезжает электропоезд.



Решение. Задачу можно решить несколькими способами. В **первом способе** используем относительность движения. Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вокруг центра железнодорожных веток с угловой скоростью электропоезда $\omega_2 = \dfrac{v_2}{R_2}$. В этой системе отсчёта (СО 2) пассажир электропоезда неподвижен, а поезд на паровой тяге движется с относительной скоростью $\vec{v}_1'$:



ППТ — поезд на паровой тяге, ЭП — электропоезд,
П — пассажир электропоезда.

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{СО 2}}(R_1), \tag{1}$$

где $\vec{v}_{\text{СО 2}}(R_1)$ — линейная скорость вращающейся системы отсчёта на расстоянии R_1 от центра, которая равна $v_{\text{СО 2}}(R_1) = \omega_2 R_1$. Таким образом,

$$v_1' = v_1 - v_{\text{СО 2}}(R_1) = v_1 - \omega_2 R_1 = v_1 - \frac{v_2}{R_2} R_1 = v_1 - \frac{v_2}{k}. \tag{2}$$

С другой стороны, во вращающейся системе отсчёта за время t_1 начало поезда на паровой тяге проходит путь, равный его длине, поэтому $v_1' = \dfrac{l}{t_1}$. Отсюда

$$v_1 = v_1' + \frac{v_2}{k} = \frac{l}{t_1} + \frac{v_2}{k} = 45 \text{ км/ч}. \tag{3}$$

Для нахождения ответа на второй вопрос задачи перейдём в систему отсчёта, вращающуюся с угловой скоростью поезда на паровой тяге $\omega_1 = \dfrac{v_1}{R_1} > \omega_2$. В этой системе отсчёта (СО 1) поезд на паровой тяге покоится, а электропоезд движется относительно него (в обратном направлении) со скоростью

$$v_2' = v_{\text{СО }1}(R_2) - v_2 = \omega_1 R_2 - v_2 = \frac{v_1}{R_1} R_2 - v_2 = k v_1 - v_2. \tag{4}$$

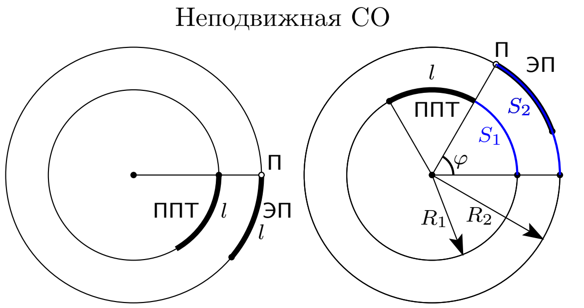
Время, за которое мимо пассажира поезда на паровой тяге проедет электровоз длиной l, равно

$$t_2 = \frac{l}{v_2'} = \frac{l}{k v_1 - v_2} = 115{,}2\ \text{с}. \tag{5}$$

Если подставить выражение для скорости из первого вопроса $v_1 = \frac{l}{t_1} + \frac{v_2}{k}$, то получим:

$$t_2 = \frac{t_1}{k} = 115{,}2\ \text{с}. \tag{6}$$

Второй способ решения не использует переход в движущуюся СО. Рассмотрим движение поездов от момента, когда напротив пассажира электропоезда оказалось начало поезда на паровой тяге, до момента, когда напротив него оказался конец поезда. Начало поезда на паровой тяге прошло за время t_1 путь $S = l + S_1$ (см. рисунок). Из геометрических соображений

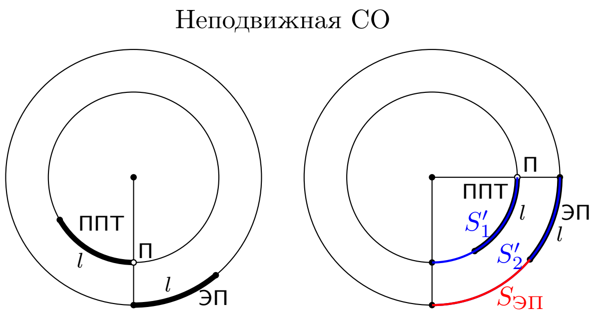


$$\varphi = \frac{S_1}{R_1} = \frac{S_2}{R_2} \Rightarrow S_1 = \frac{R_1 S_2}{R_2} = \frac{S_2}{k}. \tag{7}$$

При этом S_2 — путь, пройденный электропоездом: $S_2 = v_2 t_1$. Поэтому скорость поезда на паровой тяге равна

$$v_1 = \frac{S}{t_1} = \frac{l + \dfrac{v_2 t_1}{k}}{t_1} = \frac{l}{t_1} + \frac{v_2}{k} = 45\ \text{км/ч}. \tag{8}$$

Для нахождения ответа на второй вопрос отметим, что, поскольку поезд на паровой тяге обгоняет электропоезд, пассажир поезда на паровой тяге сначала увидит конец электропоезда, а затем его начало. За время t_2 конец электропоезда прошёл путь $S_{\text{ЭП}} = S_2' - l$. Соотношение длин дуг S_1' и S_2' также найдём из геометрических соображений:



П — пассажир поезда на паровой тяге

$$\frac{S_1'}{R_1} = \frac{S_2'}{R_2}. \tag{9}$$

Отсюда, учитывая, что S_1' — путь поезда на паровой тяге за время t_2, получаем

$$S_{\text{ЭП}} = \frac{R_2 S_1'}{R_1} - l = k S_1' - l = k v_1 t_2 - l. \tag{10}$$

С другой стороны, путь электропоезда за время t_2 составляет $S_{\text{ЭП}} = v_2 t_2$. Окончательно получаем

$$v_2t_2 = kv_1t_2 - l \Rightarrow t_2 = \frac{l}{kv_1 - v_2} = \frac{t_1}{k} = 115{,}2 \text{ с.} \tag{11}$$

Критерии оценивания задачи №1 (Поезда)

№	**Критерий**	**Значение**	**Макс. балл**
1	Идея решения задачи корректна.	Идея с переходом во вращающуюся систему отсчета, либо идея с рассмотрением пройденных путей поездов из геометрических соображений	2
2	Записано выражение для v_1' или равенство, связывающее длины путей S_1 и S_2.	Рассуждения (2) для первого варианта решения, или рассуждения (7) для второго варианта решения.	2
3	Получена верная формула для скорости поезда на паровой тяге	$v_1 = \frac{l}{t_1} + \frac{v_2}{k}$	2
4	Получена верная формула для вычисления времени t_2.	$t_2 = \frac{t_1}{k}$ или $t_2 = \frac{l}{kv_1 - v_2}$	2
5	Получены верные численные значения для v_1, t_2 (по 1 баллу за каждое).	$v_1 = 45$ км/ч. $t_2 = 115{,}2$ с.	2

Задача №2. Три состояния В сосуд с негерметичной крышкой бросили кубик льда массой 24 г и налили спирт объёмом $V_{\text{спирта}} = 250$ мл. Начальная температура спирта равна $t_1 = 1°C$, а начальная температура льда равна $t_2 = -20°C$. Какая температура будет достигнута при установлении теплового равновесия? Ответ дайте в градусах, округлив до целых.

В момент установления теплового равновесия в сосуде включили внешний нагреватель мощностью $P = 500$ Вт. Сколько времени пройдёт с момента включения нагревателя прежде, чем все вещества в сосуде достигнут $t_{\text{к}} = 90°C$? Ответ дайте в минутах.

Дополнительные сведения:

плотность спирта $\rho_{\text{спирт}} = 800$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{лед}} = 340$ кДж/кг, удельная теплота парообразования спирта $\lambda_{\text{спирт}} = 850$ кДж/кг, удельные теплоёмкости: спирта $c_{\text{спирт}} = 2400$ Дж/(кг°C), воды $c_{\text{вода}} = 4200$ Дж/(кг°C), льда $c_{\text{лед}} = 2110$ Дж/(кг°C).

Известно, что спирт испаряется при $t_{\text{исп.спирта}} = 80°C$, а вода испаряется при $t_{\text{исп.воды}} = 100°C$.

Теплообменом между стенками сосуда и внешней средой пренебречь, энергия идёт только на нагрев веществ в сосуде. Смешиванием веществ пренебречь.

Решение. 1. Условие теплового равновесия для спирта и кубика льда: $Q_{\text{спирт}} + Q_{\text{лед}} = 0$

$$c_{\text{лед}} m_{\text{лед}}(t_{\text{равн}} - t_2) + c_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}}(t_{\text{равн}} - t_1) = 0$$

Из выражения выше следует, что конечная температура равна:

$$t_{\text{равн}} = \frac{c_{\text{лед}} m_{\text{лед}} t_2 + c_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}} t_1}{c_{\text{лед}} m_{\text{лед}} + c_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}}}$$

После подстановки получаем: $t_{\text{равн}} = -1°C$

Известно, что мощность равна $P = \dfrac{A}{T}$, а работа нагревателя равняется количеству теплоты, затраченному на нагревание веществ в сосуде, таким образом, $A = Q_{\text{общее}}$. Отсюда следует, что время за которое будет совершен нагрев всех веществ в сосуде до нужной температуры равняется $T = \dfrac{Q_{\text{общее}}}{P}$.

$$Q_{\text{общее}} = Q_{\text{нс}} + Q_{\text{нл}} + Q_{\text{плавл}} + Q_{\text{испс}} + Q_{\text{нв}}$$

— общая энергия затраченная на нагрев до $90°C$

$$Q_{\text{нс}} = c_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}}(t_{\text{исп. спирта}} - t_{\text{рав}}) = 38880 \text{ Дж— нагрев спирта до } 80°C \tag{1}$$

$$Q_{\text{нл}} = c_{\text{лед}} m_{\text{лед}}(t_{\text{плавл}} - t_{\text{рав}}) = 51 \text{ Дж— нагрев льда до } 0°C \tag{2}$$

$$Q_{\text{плавл}} = \lambda_{\text{лед}} m_{\text{лед}} = 8160 \text{ Дж— плавление льда} \tag{3}$$

$$Q_{\text{исп}} = L_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}} = 170000 \text{ Дж — испарение спирта} \tag{4}$$

$$Q_{\text{вода}} = c_{\text{вода}} m_{\text{лед}}(t_{\text{к}} - t_{\text{рав}}) = 9070 \text{ Дж— нагрев воды до } t_{\text{к}} = 90°C \tag{5}$$

После вычисления, получаем, что энергия необходимая на нагрев всех веществ до $90°C$

равна: $Q_{\text{общее}} \approx 226\,000$ Дж.

Рассчитаем сколько времени необходимо для подачи данного количества тепла с использованием источника тепла с мощностью $P = 500$ Вт.

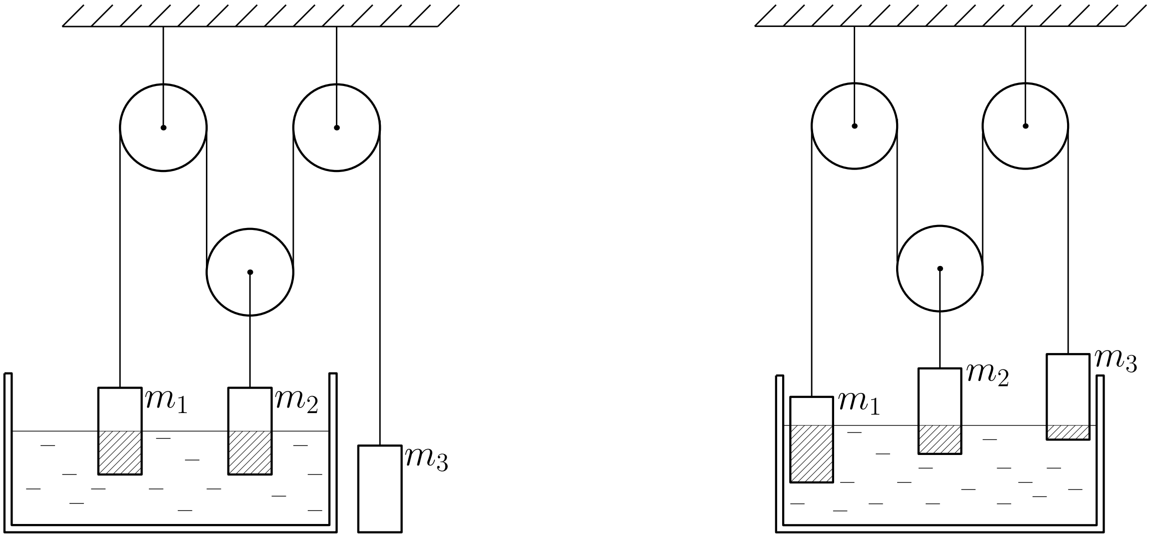
$T = \dfrac{Q_{\text{общее}}}{P} = 453$ с $\approx 7{,}5$ мин

Ответ: 1) Температура равновесия в диапазоне: $t_{\text{равн}} = (-1 \pm 0{,}5)$; 2) Время нагревания в диапазоне $T = (7{,}5 \pm 0{,}5)$ минуты.

Критерии оценивания задачи №2. Три состояния

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записано условие теплового равновесия	$Q_{\text{спирт}} + Q_{\text{лед}} = 0$ или аналогичная формула	2
2	Выведена формула для получения конечной температуры при установлении теплового равновесия и/или верно посчитана температура теплового равновесия	$t_f = \dfrac{c_i m_i t_{0i} + c_c m_c t_{0c}}{c_i m_i + c_c m_c}$ (или аналогичная формула) и/или $t_{\text{равн}} = (-1 \pm 0{,}5)^\circ C$	2
3	Верно записаны формулы для расчета количества теплоты для всех веществ	Формулы (1)-(5) или аналогичные	2
4	Верно получена формула для вычисления полной энергии системы и/или верно посчитана полная энергия системы	$Q_{\text{общее}} = Q_{\text{спирт1}} + Q_{\text{спирт2}} + Q_{\text{льда1}} + Q_{\text{льда2}} + Q_{\text{льда2}}$ (или аналогичная формула) и/или $Q_{\text{общее}} \approx 226\,000$ Дж.	2
5	Верно получена формула для вычисления времени нагрева системы и/или верно посчитано время нагрева системы до $90^\circ C$	$T = \dfrac{Q_{\text{общее}}}{P}$ и/или $T = (7{,}5 \pm 0{,}5)$ минуты	2

Задача №3. Блоки. В системе из невесомых блоков на нерастяжимых нитях висят три груза с массами m_1, m_2 и m_3. Грузы имеют форму цилиндра и одинаковый объём. Система может находиться в равновесии в двух случаях. В первом случае грузы с массами m_1 и m_2 погружены в жидкость на половину своего объёма. Во втором случае груз с массой m_3 оказался погруженным на одну шестую часть своего объёма. Найдите, на какие части объёма были погружены остальные грузы во втором случае.



Решение. Обозначим силу Архимеда как F_A, а силу натяжения нити как T. Изобразим силы, действующие в системе в первом и втором случаях:

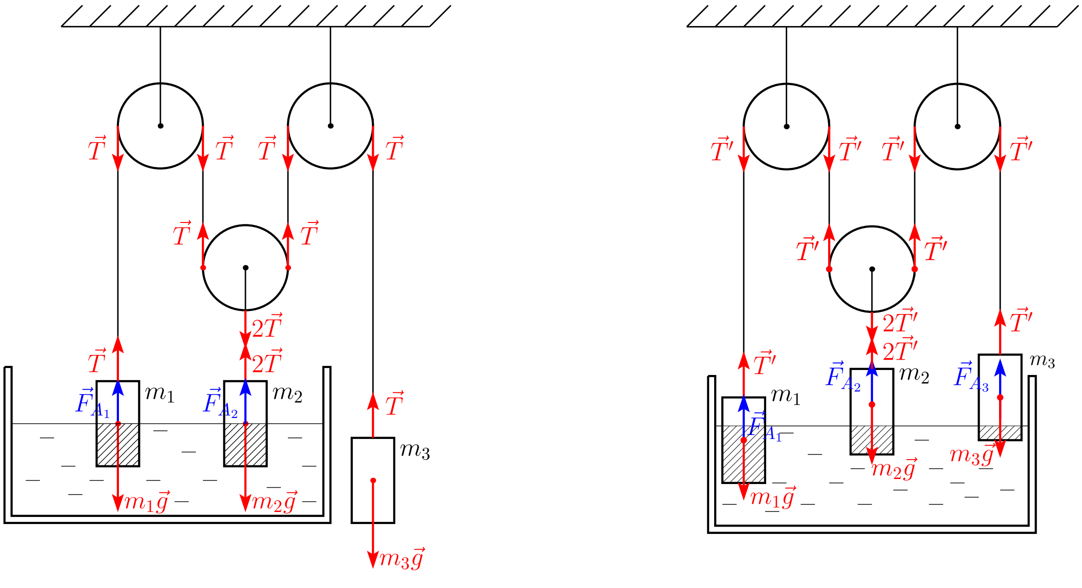


Рис. 1

В первом случае условия равновесия грузов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1g &= T + \rho g\dfrac{V}{2} \\ m_2g &= 2T + \rho g\dfrac{V}{2} \\ m_3g &= T. \end{cases} \tag{1}$$

Упрощаем:

$$\begin{cases} m_1g &= m_3g + \rho g\dfrac{V}{2} \\ m_2g &= 2(m_3g) + \rho g\dfrac{V}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Во втором случае обозначим за x и y доли объёма погружённых частей первого и второго груза, запишем условие равновесия:

$$\begin{cases} m_1g &= T' + \rho gVx \\ m_2g &= 2T' + \rho gVy \\ m_3g &= T' + \rho g\dfrac{V}{6}. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляем третье уравнение из системы (3) в первые два, получаем:

$$\begin{cases} m_1g &= m_3g + \rho gV\left(x - \dfrac{1}{6}\right) \\ m_2g &= 2m_3g + \rho gV\left(y - \dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Приравниваем правые части из двух систем 2 и 4:

$$\begin{cases} m_3g + \rho g\dfrac{V}{2} &= m_3g + \rho gV\left(x - \dfrac{1}{6}\right) \\ 2(m_3g) + \rho g\dfrac{V}{2} &= 2m_3g + \rho gV\left(y - \dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{5}$$

И получаем:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{5}{6}. \end{aligned} \tag{6}$$

Критерии оценивания задачи №3 (Блоки)

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Верно изображены силы на рисунках.	См. рисунок 1.	3
2	Записана система условий равновесия для первого случая.	Формула (1)	2
3	Записана система условий равновесия для второго случая.	Формула (3)	2
4	Приравнены правые части и составлена общая система.	Формула (5)	1
5	Выражен и посчитан ответ.	Формула (6)	2

Задача №4. Бабочка. Однородную линейку длиной $L = 20$ см, на концах которой подвешены грузы с массами $m_1 = 1{,}5$ г и $m_2 = 2$ г, подвесили за середину. В момент подвешивания линейки на нее села бабочка массой $m_0 = 5$ г, и линейка оказалась в равновесии. Затем бабочка перелетела на расстояние $l = 3$ см от своего исходного положения. Покажите на рисунке положения грузов и бабочки. Найдите массу M, которую необходимо добавить на место, с которого улетела бабочка, чтобы система снова пришла в равновесие.

Решение. Расположение масс представлено на рисунке. В первом случае для того, чтобы равновесие было возможно, бабочка должна находиться на той же стороне линейки, что и меньший груз). В втором случае, чтобы систему можно было уравновесить добавлением массы на то место, где сидела бабочка, она должна перелететь на другую сторону линейки.

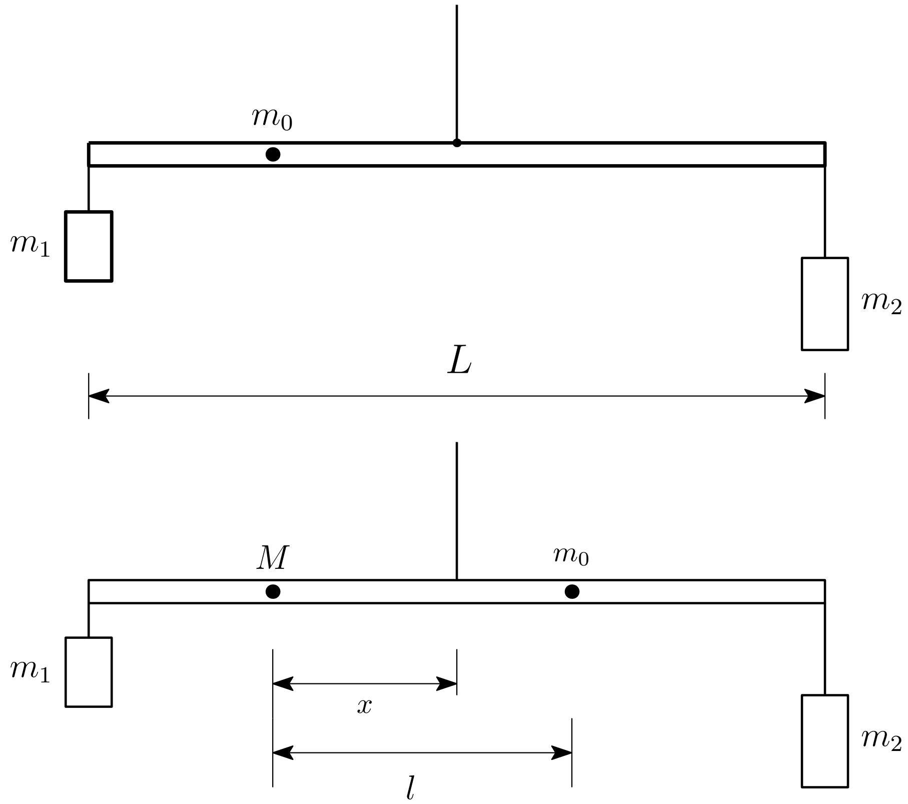


Рис. 1

Введём обозначения: L — длина линейки; m_1, m_2 — массы грузов на её концах; m_0 — масса бабочки; l — расстояние, на которое перелетела бабочка, от точки подвеса; x — расстояние от точки подвеса, на которое необходимо поместить неизвестную массу M, чтобы система вновь пришла в равновесие.

Запишем правило моментов для первого случая:

$$m_1 g \frac{L}{2} + m_0 g x = m_2 g \frac{L}{2} \tag{1}$$

$$x = \frac{m_2 - m_1}{m_0} \frac{L}{2} \tag{2}$$

$$x = \frac{2-1{,}5}{5}\frac{0{,}2}{2} = 0{,}01 \text{ м } = 1 \text{ см} \tag{3}$$

Правило моментов для второго случая:

$$m_0 g(l-x) + m_2 g\frac{L}{2} = Mgx + m_1 g\frac{L}{2} \tag{4}$$

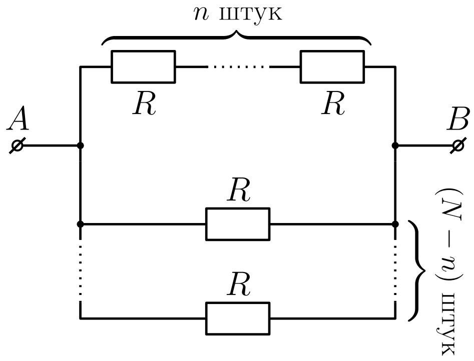
$$M = \frac{m_0(l-x)}{x} + \frac{m_2 - m_1}{x}\frac{L}{2} \tag{5}$$

$$M = \frac{5\cdot(3-1)}{1} + \frac{2-1{,}5}{1}\frac{20}{2} = 15 \text{ г} \tag{6}$$

Таким образом, на место бабочки нужно добавить массу $M = 15$ г.

Критерии оценивания задачи №4 (Бабочка).

№	**Критерий**	**Значение**	**Макс. балл**
1	Верный рисунок с правильной расстановкой масс.	Рисунок 1.	2
2	Верно записанное правило моментов.	Формула (1)	2
3	Получено выражение для координаты x из правила моментов и посчитано числовое значение.	Формулы (2) и (3)	2
4	Правильно записано второе правило моментов.	Формула (4)	2
5	Получена формула и посчитано числовое значение для M.	Формулы (5) и (6)	2



Задача №5. Последовательно и параллельно. У школьника Саши есть N одинаковых резисторов сопротивлением R каждый. Саша собрал из них такую цепочку: n резисторов он соединил последовательно, а все остальные присоединил параллельно к ним. Саша с помощью омметра измерил зависимость общего сопротивления $R_{\text{общ}}$ цепочки от числа последовательно соединённых резисторов, получившаяся зависимость приведена в таблице ниже.

n	2	3	4	5	6	7	8
$R_{\text{общ}}$, Ом	9,4	10,9	12,8	15,4	19,2	25,5	37,6

1) Запишите формулу для сопротивления цепочки $R_{\text{общ}}$, выразив его через следующие параметры: сопротивление одного резистора R, число соединённых последовательно резисторов n и полное число резисторов N.
2) Перепишите эту формулу в виде $y = N - R \cdot x$, для чего определите величины x и y.
3) Постройте зависимость $y(x)$ на имеющемся листке с сеткой и графически определите значения сопротивления одного резистора R и полного числа резисторов N.

Решение. Общее сопротивление последовательно соединённой части цепочки будет равно nR, тогда для параллельного соединения

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R}}_{N-n \text{ раз}} + \frac{1}{nR} = \frac{N-n}{R} + \frac{1}{nR} = \frac{(N-n)n+1}{nR}. \tag{1}$$

Тогда полное сопротивление цепочки

$$R_{\text{общ}} = \frac{nR}{(N-n)n+1}. \tag{2}$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$nR = R_{\text{общ}}\left((N-n)n+1\right) = R_{\text{общ}}\left(Nn - n^2 + 1\right). \tag{3}$$

Чтобы при полном числе резисторов N был множитель, равный единице, разделим это уравнение на $R_{\text{общ}} \cdot n$:

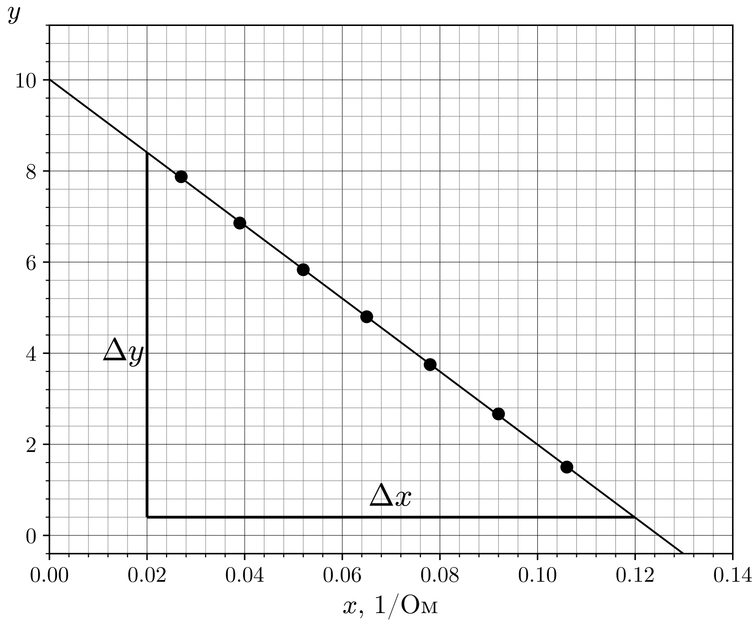
$$\frac{R}{R_{\text{общ}}} = N - n + \frac{1}{n}, \qquad n - \frac{1}{n} = N - R \cdot \frac{1}{R_{\text{общ}}}. \tag{4}$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = N - R \cdot x$, установим, что

$$y = n - \frac{1}{n}, \qquad x = \frac{1}{R_{\text{общ}}}. \tag{5}$$

График зависимости $y(x)$ будет иметь вид прямой линии, полное число резисторов N можно найти по точке пересечения прямой с осью Oy, а сопротивление одного резистора R — по угловому коэффициенту прямой. Вычисляем значения x и y, заносим их в таблицу и строим график:

n	2	3	4	5	6	7	8
$R_{\text{общ}}$, Ом	9,4	10,9	12,8	15,4	19,2	25,5	37,6
x, 1/Ом	0,106	0,092	0,078	0,065	0,052	0,039	0,027
y	1,500	2,667	3,750	4,800	5,833	6,857	7,875



По графику находим:

$$N = 10, \qquad R = \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} = \frac{8{,}4 - 0{,}4}{0{,}12 - 0{,}02} = 80 \text{ Ом}. \tag{6}$$

Критерии оценивания задачи №5. Последовательно и параллельно

№	**Критерий**	**Значение**	**Макс. балл**
1	Выведена формула зависимости $R_{\text{общ}}$ от R, n, N.	Формула (2) или эквивалентная	3
2	Определены формулы для величин x, y в линейной зависимости $y = N - R \cdot x$.	$y = n - \frac{1}{n}, \quad x = \frac{1}{R_{\text{общ}}}.$	3
3	Построен график функции $y(x)$, что включает в себя: • подписаны оси, • поставлены точки, • выбран подходящий масштаб, чтобы график занимал не менее 80% места, • проведена прямая.		2, из них: 0,5 0,5 0,5 0,5
4	Определена величина R с точностью не хуже ± 3 Ом.	$R = 80$ Ом	1
5	Определена величина N.	$N = 10$	1