

9 класс

Задача 9.1. Таков путь!

Одновременно с тем, как первое тело, находившееся на поверхности земли, бросили вертикально вверх, второе тело, находившееся на высоте $H = 7$ м, отпустили без начальной скорости. В некоторый момент времени оба тела столкнулись, не долетев до земли, причём второе тело прошло **путь**, в 1,8 раза больший, чем первое. Определите начальную скорость первого тела. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха и размерами тел пренебречь.

Ответ: 6,83 м/с.

Решение: Пусть s — путь, пройденный первым телом до столкновения, а $1,8s$ — путь, пройденный, соответственно, вторым телом, причём $1,8s = gt^2/2$, где t — время, прошедшее до их столкновения. С другой стороны

$$H - 1,8s = vt - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{H}{v},$$

где v — искомая начальная скорость первого тела.

Рассмотрим два случая: 1) первое тело столкнулось со вторым до того, как первое тело достигло верхней точки своей траектории; 2) столкновение произошло после прохождения первым телом верхней точки своей траектории.

1. В первом случае путь, пройденный первым телом, совпадает с модулем его перемещения. Отсюда

$$H = s + 1,8s \Rightarrow s = H/2,8 = 2,5 \text{ м.}$$

Определим t и v

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8s}{g}} = \sqrt{\frac{9 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} \approx 0,95 \text{ с}, \quad v = \frac{H}{t} \approx 7,38 \text{ м/с.}$$

Однако найденной скорости v соответствует время подъёма $t_{\text{под}} = v/g \approx 0,738 \text{ с} < t$. Это значит, что первый случай не допускается условием задачи.

2. Во втором случае первое тело столкнулось со вторым через время $(t - v/g)$ после прохождения им верхней точки. Следовательно, путь, пройденный первым телом, равен

$$s = \frac{v^2}{2g} + \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{g} + \frac{gt^2}{2} - vt = \frac{v^2}{g} + 1,8s - H \Rightarrow 0,8s + \frac{v^2}{g} - H = 0.$$

Так как $1,8s = gt^2/2 = gH^2/(2v^2)$, получим следующее уравнение:

$$\frac{2gH^2}{9v^2} + \frac{v^2}{g} - H = 0 \Rightarrow \frac{2}{9x} + x - 1 = 0, \text{ где } x = \frac{v^2}{gH},$$

решение которого — $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2/3$. Первый найденный корень необходимо отбросить, поскольку тела, по условию, сталкиваются ещё в полёте:

$$t = H/v < 2v/g \Rightarrow 1/2 < x.$$

Отсюда получим, что начальная скорость первого тела должна быть равна

$$v = \sqrt{2gH/3} = \sqrt{140/3} \text{ м/с} \approx 6,83 \text{ м/с.}$$

Критерии:

- | | |
|---|-----------|
| 1) Показано, что в первом случае решения нет | 2 балла |
| 2) Формула $H = vt$ или аналог | 1 балл |
| 3) Формула $1,8s = gt^2/2$ или аналог | 0,5 балла |
| 4) Верная формула для пути s , пройденного нижним телом | 1,5 балла |
| 5) Получено верное уравнение для нахождения v | 1,5 балла |
| 6) Получены верные решения уравнения из пункта 5 | 1 балл |
| 7) Обоснованно выбран верный корень уравнения из пункта 5 | 1 балл |
| 8) Найдено значение начальной скорости $v \approx 6,83 \text{ м/с}$ | 1,5 балла |

Указание проверяющим:

- В отсутствие баллов за п. 1 остальные пункты оцениваются независимо.
- Уравнение в п. 5 должно содержать только v и известные величины.
- Если нефизичный корень в п. 7 отброшен без обоснования, баллы за ответ (п. 8) не ставить.

Задача 9.2. Куб с полостью.

Если полый пластмассовый куб (в полости находится воздух) удерживается в воде с помощью нити, привязанной ко дну сосуда (рис. 9.1а), сила натяжения этой нити равна $T_1 = 56$ Н. Если же полость куба полностью заполнить водой и, подвесив на нити, наполовину погрузить в воду (рис. 9.1б), сила натяжения нити будет равна $T_2 = 44$ Н. Какова толщина стенок этого куба? Плотность воды равна 1000 кг/м^3 , плотность пластмассы — 1200 кг/м^3 . Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . Толщина стенок везде одинакова.

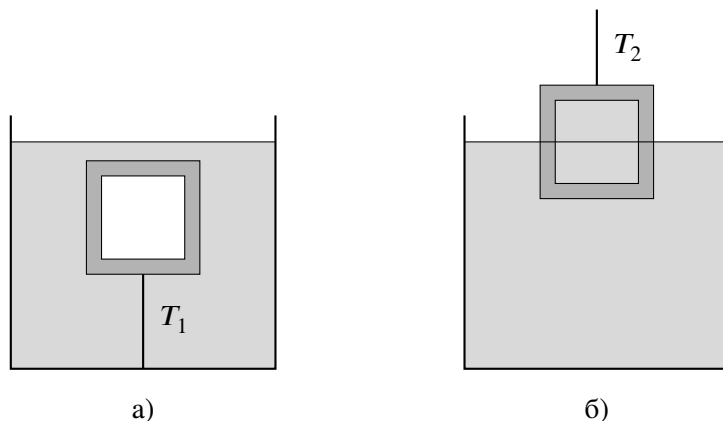


Рис. 9.1.

Ответ: 9 мм.

Решение: Пусть V — внешний объём куба, а $V_{\text{п}}$ — объём его полости. В первом случае

$$T_1 = \rho_{\text{в}} g V - \rho_{\text{пл}} g (V - V_{\text{п}}),$$

а во втором —

$$T_2 = \rho_{\text{пл}} g (V - V_{\text{п}}) + \rho_{\text{в}} g V_{\text{п}} - \rho_{\text{в}} g V/2.$$

Складывая эти два равенства, получим

$$V_{\text{п}} + V/2 = (T_1 + T_2)/(\rho_{\text{в}} g) = 10000 \text{ см}^3.$$

Выразим отсюда $V_{\text{п}}$ и подставим в первое равенство:

$$\begin{aligned} T_1 &= \rho_{\text{в}} g V - \rho_{\text{пл}} g (3V/2 - 10000 \text{ см}^3) \Rightarrow \rho_{\text{пл}} g \cdot 10000 \text{ см}^3 - T_1 = g V (3/2 \cdot \rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{в}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \frac{\rho_{\text{пл}} g \cdot 10000 \text{ см}^3 - T_1}{g (3/2 \cdot \rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{в}})} = \frac{120 \text{ Н} - 56 \text{ Н}}{10 \text{ м/с}^2 \cdot 800 \text{ кг/м}^3} = 8000 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Объём полости, соответственно, равен $V_{\text{п}} = 10000 \text{ см}^3 - V/2 = 6000 \text{ см}^3$.

Чтобы найти толщину стенок куба d , вычислим длину его ребра $a = \sqrt[3]{8000 \text{ см}^3} = 20 \text{ см}$ и длину ребра полости $b = \sqrt[3]{6000 \text{ см}^3} \approx 18,2 \text{ см}$. Отсюда

$$d = (a - b)/2 \approx 0,9 \text{ см}.$$

Критерии:

- 1) Записано выражение $T_1 = \rho_{\text{в}} g V - \rho_{\text{пл}} g (V - V_{\text{п}})$ или аналог 1 балл
- 2) Записано выражение $T_2 = \rho_{\text{пл}} g (V - V_{\text{п}}) + \rho_{\text{в}} g V_{\text{п}} - \rho_{\text{в}} g V/2$ или аналог 1,5 балла
- 3) Найдено верное значение объёма куба 2 балла
- 4) Найдено верное значение объёма полости 2 балла
- 5) Найдено верное значение ребра куба a 1 балл
- 6) Найдено верное значение ребра полости b 1 балл
- 7) Найдено верное значение d 1,5 балла

Задача 9.3. Лёд в керосине.

Экспериментируя в школьной лаборатории, мальчик Паша взял пустой теплоизолированный калориметр ёмкостью 100 см^3 и налил туда 98 см^3 горячего керосина. Затем он взял кусок льда при температуре 0°C и аккуратно, но быстро поместил его в калориметр. Дождавшись наступления теплового равновесия, Паша обнаружил, что весь лёд растаял, температура керосина опустилась до 0°C , а суммарный объём содержимого калориметра снова стал равен 98 см^3 . Чему была равна начальная температура керосина? Удельная теплоёмкость керосина равна $2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг . Плотности воды, льда и керосина, соответственно, равны 1000 кг/м^3 , 900 кг/м^3 и 800 кг/м^3 . Теплоёмкостью калориметра и тепловым расширением керосина пренебречь.

$^\circ\text{C}$.

Ответ: 44,2

Решение: Превращаясь в воду, лёд уменьшает свой объём на 10%. Это значит, что для удовлетворения условию задачи, Паша должен положить в калориметр такой кусочек льда, чтобы часть керосина вылилась из сосуда. Пусть V — объём льда ($V > 2 \text{ см}^3$). Тогда объём оставшегося в калориметре керосина будет равен $(100 \text{ см}^3 - V)$. При таянии льда его объём станет $\rho_{\text{л}}V/\rho_{\text{в}} = 0,9V$, а общий объём содержимого уменьшится до 98 см^3 , поэтому

$$100 \text{ см}^3 - V + 0,9V = 98 \text{ см}^3 \Rightarrow 0,1V = 2 \text{ см}^3 \Rightarrow V = 20 \text{ см}^3.$$

Пусть t — начальная температура керосина. Запишем уравнение теплового баланса для содержимого калориметра:

$$c_{\text{к}}\rho_{\text{к}} \cdot 80 \text{ см}^3(t - 0^\circ\text{C}) = \lambda\rho_{\text{л}} \cdot 20 \text{ см}^3 \Rightarrow t = \frac{\lambda\rho_{\text{л}} \cdot 20 \text{ см}^3}{c_{\text{к}}\rho_{\text{к}} \cdot 80 \text{ см}^3} = \frac{330000 \text{ Дж/кг} \cdot 900 \text{ кг/м}^3}{2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C}) \cdot 800 \text{ кг/м}^3 \cdot 4} \approx 44,2^\circ\text{C}.$$

Критерии:

- | | |
|--|---------|
| 1) Идея о том, что при погружении льда часть керосина выливается | 2 балла |
| 2) Записана формула для объёма керосина ($100 \text{ см}^3 - V$) | 1 балл |
| 3) Найдено, что объём льда равен 20 см^3 | 2 балла |
| 4) Правильно записано уравнение теплового баланса | 3 балла |
| 5) Найдена начальная температура керосина $t \approx 44,2^\circ\text{C}$ | 2 балла |

Указание проверяющим:

Уравнении теплового баланса (п. 4) должно включать правильные значения объёма/массы керосина и льда, иначе баллы за этот пункт не ставятся.

Задача 9.4. Переплывающее равновесие.

На однородную доску массой $M = 1,5$ кг, лежащую своими краями на двух опорах, положили симметричный прямоугольный сосуд такой же массы, в котором находится ледяной кубик массой $m = 900$ г. Длина сосуда равна половине длины доски, а его правый край совпадает с краем доски. Вначале лёд находится вплотную к правому краю сосуда (см. рис. 9.2). Определите длину доски L , если после того как весь лёд растаял, сила давления доски на левую опору увеличилась на 15%. Плотность льда равна 900 кг/м^3 . Толщиной стенок сосуда можно пренебречь, вода из сосуда не выливается.

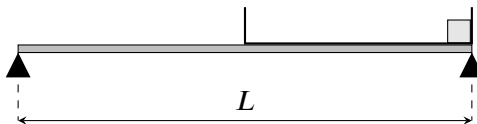


Рис. 9.2.

Ответ: 92 см.

Решение: Пусть a — длина ребра ледяного куба. Тогда

$$a^3 = m/\rho_{\text{л}} = 1000 \text{ см}^3 \Rightarrow a = 10 \text{ см.}$$

Рассмотрим силы, действующие на систему «доска-сосуд-кубик» до того, как лёд растает (рис. 9.3а), и после таяния (рис. 9.3б). Запишем в каждом случае правило моментов относительно правой опоры:

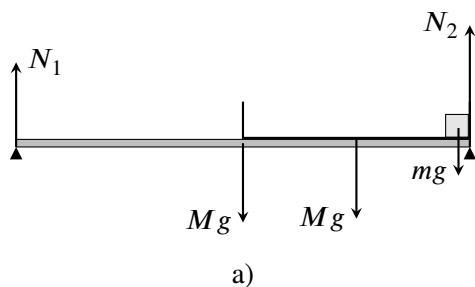
$$\text{(до таяния)} \quad N_1 L = Mg \cdot \frac{L}{2} + Mg \cdot \frac{L}{4} + mg \cdot \frac{a}{2},$$

$$\text{(после таяния)} \quad N'_1 L = Mg \cdot \frac{L}{2} + (M + m)g \cdot \frac{L}{4}.$$

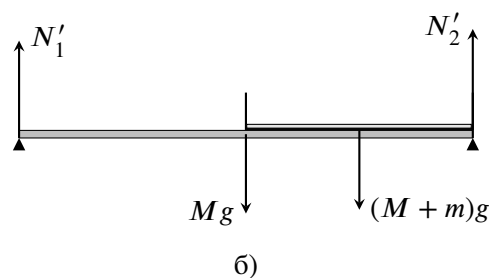
Так как $N'_1 = 1,15N_1$,

$$1,15Mg \cdot \frac{3L}{4} + 1,15mg \cdot \frac{a}{2} = Mg \cdot \frac{3L}{4} + mg \cdot \frac{L}{4} \Rightarrow L(m - 0,45M) = 2,3am \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{2,3ma}{m - 0,45M} = \frac{0,9 \text{ кг} \cdot 23 \text{ см}}{0,9 \text{ кг} - 0,675 \text{ кг}} = 92 \text{ см.}$$



а)



б)

Рис. 9.3.

Критерии:

- 1) Найдена длина ребра кубика льда (10 см) 0,5 балла
- 2) Идея о том, что сила тяжести для сосуда приложена к его середине 1 балл
- 3) Идея о том, что сила тяжести для кубика приложена к его середине 1 балл
- 4) Идея о том, что сила тяжести для слоя воды приложена к его середине 1 балл
- 5) Правильно записано правило моментов для первого случая (когда лёд твёрдый) 2 балла
- 6) Правильно записано правило моментов для второго случая (когда лёд растаял) 2 балла
- 7) Найдено значение $L = 92$ см 2,5 балла

Указание проверяющим:

- 1) В пунктах 2-4 достаточно чертежа, на котором изображена соответствующая сила, или указания правильного значения плеча этой силы в правиле моментов.
- 2) Если поставлены баллы за п. 5, баллы за пункты 2 и 3 ставятся автоматически. Аналогично, если поставлены баллы за п. 6, должны стоять баллы за пп. 2 и 4.
- 3) В пп. 5 и 6 правило моментов должно содержать расписанные формулы для моментов всех необходимых сил.

Задача 9.5. Большая цепь.

В цепи, изображённой на рис. 9.4, все резисторы имеют одинаковые сопротивления, а амперметр и вольтметр идеальны. К точкам M и N прикладывают постоянное напряжение, в результате чего амперметр показывает 75 мА, а вольтметр — 5,5 В. Найдите общее сопротивление цепи между точками M и N .

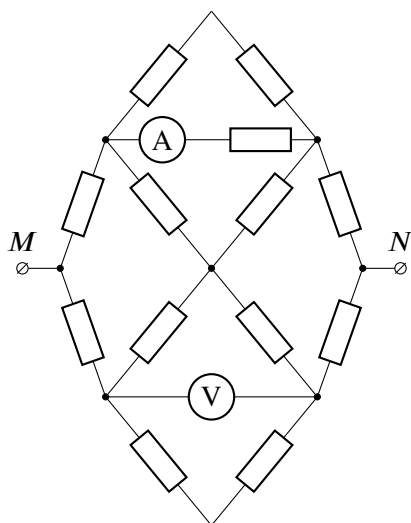


Рис. 9.4.

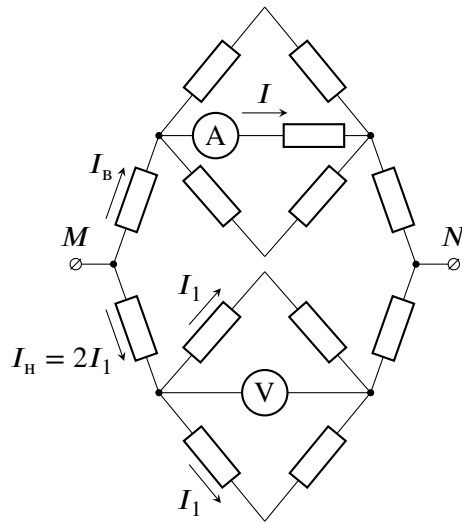


Рис. 9.5.

Ответ: 60 Ом.

Решение: Заметим, что данная цепь является симметричной относительно вертикальной (по рисунку) оси, проходящей через её центр. Поэтому ток из верхней части цепи не перетекает в её нижнюю часть, и цепь в её центральной точке можно разорвать так, как показано на рис. 9.5.

Пусть r — сопротивление каждого резистора в цепи, U — напряжение на вольтметре, а I — сила тока через амперметр. Сила тока через резисторы, параллельные вольтметру, равна $I_1 = U/(2r)$. Следовательно, сила тока, зашедшего в нижнюю часть цепи, равна $I_2 = 2I_1 = U/r$, а напряжение между точками M и N равно $U_{MN} = 2I_1 r + U + 2I_1 r = 3U$.

Сопротивление верхней половины цепи составляет $R_{\text{в}} = r + r/2 + r = 5r/2$, поэтому сила тока, зашедшего в верхнюю часть, равна $I_{\text{в}} = U_{MN}/R_{\text{в}} = 6U/(5r)$. Запишем теперь связь между током через амперметр и U :

$$I = \frac{I_{\text{в}}}{2} = \frac{3U}{5r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3U}{5I} = \frac{3 \cdot 5,5 \text{ В}}{5 \cdot 0,075 \text{ А}} = 44 \text{ Ом}.$$

Соответственно, сопротивление верхней части цепи равно $R_{\text{в}} = 5r/2 = 110 \text{ Ом}$, а сопротивление нижней — $R_{\text{н}} = 3r = 132 \text{ Ом}$. Общее сопротивление цепи составляет

$$R_{MN} = \frac{R_{\text{в}} R_{\text{н}}}{R_{\text{в}} + R_{\text{н}}} = \frac{110 \cdot 132}{242} \text{ Ом} = 60 \text{ Ом}.$$

Критерии:

- | | |
|---|-----------|
| 1) Правильно сделан разрыв цепи в центральной точке | 1,5 балла |
| 2) Все токи в нижней части цепи корректно выражены через одну величину | 1 балл |
| 3) Все токи в верхней части цепи корректно выражены через одну величину | 1,5 балла |
| 4) Найдена правильная связь между напряжением между точками M и N и показанием вольтметра . . . | 2 балла |
| 5) Найдена правильная связь между показаниями приборов и сопротивлением резисторов | 2 балла |
| 6) Найдено сопротивление цепи между точками M и N (60 Ом) | 2 балла |

Указания проверяющим:

- 1) Когда участник использует при решении законы Кирхгофа «в лоб» (не разрывая цепь в центральной точке), балл за п.1 ставится в том случае, если поставлены баллы за пп 4 и/или 5.
- 2) Если участник получил правильный ответ иным корректным способом, альтернативном авторскому, решение оценивается полным баллом.