9 класс. Решения и критерии.

9-1. Ехавший со скоростью v_0 товарный поезд, когда его локомотив миновал первую станцию и начал разгон с некоторым постоянным ускорением. С какой скоростью хвостовой вагон поезда проедет мимо следующей по пути следования станции? Времена прохождения перегона между первой и второй станциями для локомотива и хвостового вагона отличаются в два раза, а расстояние между этими станциями равно длине поезда. Длина каждого вагона мала по сравнению с длиной всего состава.

Решение

Выбрав в качестве начала отсчета по времени момент, когда поезд начал двигаться с ускорением, введем обозначения для последующих характерных ситуаций данной задачи: t_1 - момент, когда локомотив миновал вторую станцию, а хвостовой вагон проехал мимо первой станции, t_2 - момент, когда хвостовой вагон достиг второй станции. Если длину поезда и расстояние между станциями обозначить как ℓ, то система кинематических уравнений для этих моментов времени будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ell = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \\ 2\ell = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}. \end{cases}$$

Первое из них относится к перемещению локомотива между станциями, а второе - к перемещению хвостового вагона до момента проезда мимо второй станции. Из условия задачи о соотношении между временами прохождения перегона:

$$t_1 = 2(t_2 - t_1) \;\Leftrightarrow\; t_1 = 2t_2/3$$

Из данной системы легко найти величину приращения скорости поезда за время t_2:

$$\Delta v = a t_2 = 6 v_0.$$

Тогда окончательно получим, что

$$v = v_0 + \Delta v = 7 v_0.$$

Ответ: $v = v_0 + \Delta v = 7 v_0.$

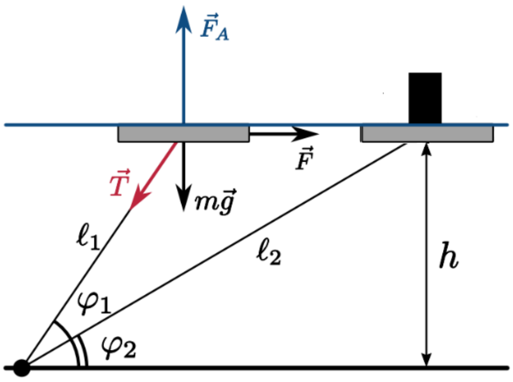
Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Выбраны моменты отсчета времени t_1 - момент, когда локомотив миновал вторую станцию, а хвостовой вагон проехал мимо первой станции, t_2 - момент, когда хвостовой вагон достиг второй станции.	2
2	Записана система кинематических уравнений	2
3	Найдено соотношение между моментами времени t_1 и t_2	2
4	Найдена величина приращения скорости	2
5	Найдено выражение для скорости	2
	ИТОГО:	**10**

9-2. Рыболовецкую платформу закрепили с помощью троса длиной ℓ_1 на якоре. Глубина моря под платформой равна h, однако поверхностное течение настолько сильное, что платформа погрузилась в воду практически полностью. После того, как после того, как на платформу была поставлена первая бочка с уловом пришлось увеличить длину якорного троса до ℓ_2. Какое максимальное количество одинаковых бочек сможет выдержать платформа если масса каждой бочки примерно равна массе платформы?

Решение

Запишем уравнения равновесия сил, действующих на платформу после прибытия на место погрузки бочек, в проекции на координатные оси (см. рис.):



$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = T\sin\varphi_1 + mg \\ F = T\cos\varphi_1, \end{cases}$$

где $F_{\text{АРХ}}$ - сила Архимеда, F - сила напора течения воды, T - сила натяжения троса, m - масса платформы. Исключив из данной системы уравнений для платформы без погруженных на нее бочек с уловом и из аналогичной системы для платформы с первой погруженной на нее бочкой (в этом случае mg заменяется на $2mg$) величину силы натяжения якорного троса получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = F\operatorname{tg}\varphi_1 + mg \\ F_{\text{АРХ}} = F\operatorname{tg}\varphi_2 + 2mg. \end{cases}$$

Предельное условие плавучести платформы при N погруженных на нее бочках определяется минимальным значением угла наклона троса (φ = 0) и может записано в следующем виде: $F_{\text{АРХ}} = (N+1)mg$. Из последних трех уравнений непосредственно следует ответ задачи:

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Выразив тангенс угла наклона троса через его длину и глубину океана в месте погрузки бочек

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \frac{d}{\sqrt{\ell_{1,2}^2 - d^2}},$$

получаем окончательно, что число бочек равно целой части от выражения $\left(\frac{\sqrt{\ell_2^2-h^2}}{\sqrt{\ell_2^2-h^2}-\sqrt{\ell_1^2-h^2}}\right)$

Ответ: N = целая часть $\left(\frac{\sqrt{\ell_2^2-h^2}}{\sqrt{\ell_2^2-h^2}-\sqrt{\ell_1^2-h^2}}\right)$ от

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записаны уравнения равновесия платформы без бочек	2
2	Составлена система из выражений для сил Архимеда в случае пустой платформы и платформы с одной бочкой.	2
3	Записано предельное условие плавучести платформы при N погруженных на нее бочках	2
4	Получено выражение для числа бочек	2
5	В выражении для числа бочек тангенсы углов выражены через данные условия задачи и записан ответ в целых числах	2
	ИТОГО:	**10**

9-3. При подключении к источнику тока последовательно соединенных k одинаковых резисторов на них выделится такая же мощность P как при подключении к этому источнику одного такого резистора. Какая мощность выделится на k параллельно подключенных резисторах?

Решение

Исходя из условия задачи можно сделать вывод, что где-то происходит потеря мощности, значит источник обладает собственным (внутренним) сопротивлением. Обозначим его r, а напряжение $\mathscr{E}$ (ЭДС) источника . Мощность, выделяемая на резисторах

$$P = I_1^2 R = I_k^2 kR$$

$$\frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2}R = \frac{\mathscr{E}^2}{(kR+r)^2}kR$$

Тогда

$$k(R+r)^2 = (kR+r)^2$$

$$\sqrt{k}(R+r) = (kR+r)$$

$$r = \sqrt{k}R$$

$$R_0 = \frac{R}{k}.$$

При параллельном соединении резисторов общее сопротивление

Тогда мощность

$$P_1 = I^2\frac{R}{k} = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(\frac{R}{k}+r\right)^2}\frac{R}{k}$$

$$P_1 = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(\frac{R}{k}+\sqrt{k}R\right)^2}\frac{R}{k} = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\frac{k}{\left(1+k\sqrt{k}\right)^2}$$

Вспомним, что $P = I_1^2 R = I_k^2 kR$, тогда

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(R + \sqrt{k}R\right)^2} R = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \frac{1}{\left(1+\sqrt{k}\right)^2}$$

$$\frac{\mathscr{E}^2}{R} = \left(1+\sqrt{k}\right)^2 P.$$

Отсюда получим искомую мощность

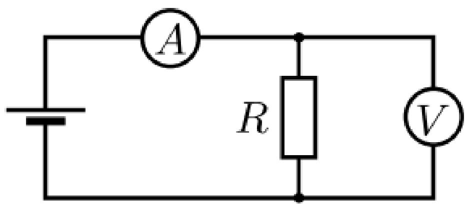
$$P_1 = \frac{k\left(1+\sqrt{k}\right)^2}{\left(1+k\sqrt{k}\right)^2} P.$$

Ответ: $P_1 = \frac{k\left(1+\sqrt{k}\right)^2}{\left(1+k\sqrt{k}\right)^2} P.$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Сделан вывод, что источник имеет внутреннее сопротивление	2
2	Записаны выражения для мощностей, выделяемых на резисторах	2
3	Найдены выражения для сопротивления и мощности при параллельном соединении резисторов.	2
4	Сделаны преобразования, приводящие к конечной формуле	2
5	Записано выражение, являющееся ответом.	2
	ИТОГО:	**10**

9-4. Для измерения сопротивления резистора R собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра (см. рисунок). Вольтметр подключён параллельно резистору и показывает $U_1 = 1$ В, амперметр подключён к ним последовательно и показывает $I_1 = 1$ А. После того, как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать $U_2 = 2$ В, а амперметр $I_2 = 0{,}5$ А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивления резистора, амперметра и вольтметра.



Решение

Обозначим через R_A, R_V и R сопротивления амперметра, вольтметра и резистора, а через U – напряжение батарейки. Тогда по закону Ома в первом и во втором случаях получаем:

$$U = I_1 R_A + U_1, \quad U = I_2 R_A + U_2.$$

Отсюда $(I_1 - I_2) R_A = U_2 - U_1,$

$$R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 2 \text{ Ом}; \qquad U = I_1 \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} + U_1 = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} = 3 \text{ В}.$$

В первом случае через параллельно соединённые вольтметр и резистор течёт суммарный ток

$$I_1 = U_1 \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right).$$

Во втором случае на параллельно соединённых амперметре и резисторе падает напряжение $U - U_2$.

Поэтому в данном случае ток, текущий через резистор равен $\frac{U - U_2}{R}$, а ток через вольтметр $\frac{U - U_2}{R} + I_2.$

С другой стороны, этот же ток равен $\frac{U_2}{R_V}$, то есть $\frac{U - U_2}{R} + I_2 = \frac{U_2}{R_V}.$

Из записанных соотношений получаем:

$$\frac{U}{R} = U_2 \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) - I_2 = I_1 \frac{U_2}{U_1} - I_2;$$

$$R = \frac{U}{I_1 \frac{U_2}{U_1} - I_2} = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} \cdot \frac{U_1}{I_1 U_2 - I_2 U_1} = \frac{U_1}{I_1 - I_2} = 2 \text{ Ом}.$$

$$\frac{1}{R_V} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{1}{R} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_1} = \frac{I_2}{U_1};$$

$$R_V = \frac{U_1}{I_2} = 2 \text{ Ом}.$$

Критерии оценивания

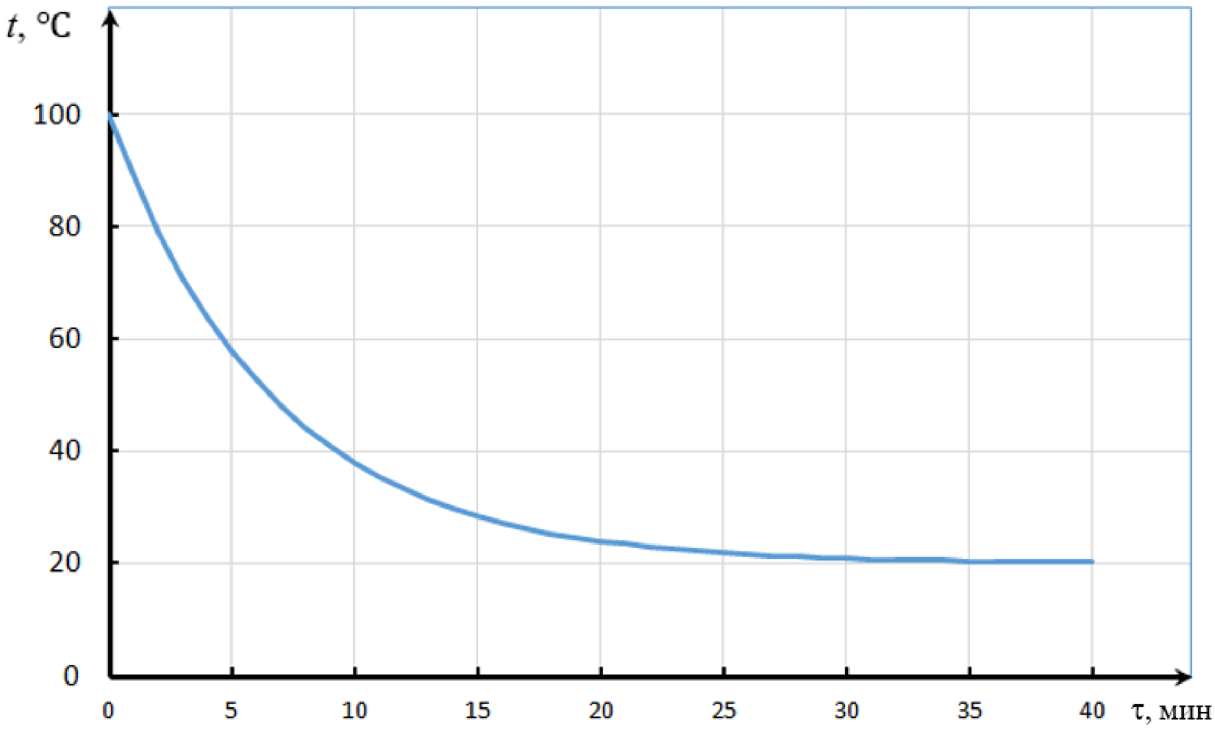
№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записан закон Ома для первого и второго случаев	2
2	Найдены токи, текущие через вольтметр, амперметр и резистор в первом и втором случаях	2
3	Найдены и приравнены токи через вольтметр во втором случае	2
4	Решена система уравнений	2
5	Получены значения всех нужных сопротивлений.	2
	ИТОГО:	**10**

9-5. Участники сентябрьской смены в образовательном центре "Импульс" на занятии вскипятили воду в чайнике и затем оставили её охлаждаться, сняв зависимость температуры t воды в чайнике от времени остывания τ, которая представлена в таблице. Полагая, что мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур воды в чайнике t и в лаборатории $N = k(t - t_0)$, где t_0 – температура окружающего воздуха, а k - коэффициент теплоотдачи, построить график зависимости температуры t воды в чайнике от времени τ. Используя график зависимости $t(\tau)$, определить температуру t_0 воздуха в лаборатории и коэффициент теплоотдачи k. Масса воды в чайнике $m = 1{,}5$ кг, удельная теплоёмкость воды с = 4,2 кДж/(кг·К). Теплоёмкостью чайника и испарением воды пренебречь

t, °С	100	90	80	70	60	50	40	30	25	22	21	20	20
τ, мин	0	1	2	2,8	4,6	6	9	13	22	26	30	35	40

Решение

Построим график зависимости температуры t°С воды в чайнике от времени остывания τ в минутах.



По графику определили температуру t_0 воздуха в лаборатории $t_0 = 20$°С.

Теплота, теряемая водой за малое время остывания τ равна (Закон Ньютона – Рихмана)

$$Q = k(t - t_0)\tau = cm\Delta t,$$

где Δt уменьшение температуры воды за малое время τ. С другой стороны

$$Q = cm\Delta t$$

Тогда, приравнивая, получим

$$k(t - t_0)\tau = cm\Delta t \qquad (1)$$

Откуда

$$k = \frac{cm\Delta t}{(t - t_0)\tau} \qquad (2)$$

Проведем касательную к графику в точке $t = 100$°C. Определим по касательной отношение

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{100}{8}\frac{\text{°C}}{\text{мин}} = 12{,}8\ \text{°C/мин} = 0{,}21\ \text{°C/с} \quad (3)$$

Подставим числовые значения в (2)

$$k = \frac{cm\Delta t}{(t - t_0)\tau} = \frac{4200\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{°C}}\cdot 1{,}5\text{кг}}{100\text{°C} - 20\text{°C}}\cdot 0{,}21\ \frac{\text{°C}}{\text{с}} = 16{,}54\ \frac{\text{Дж}}{\text{°C}\cdot\text{с}} \qquad (4)$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Построен график зависимости температуры t°C воды в чайнике от времени остывания τ	3
2	Определена температура t_0 воздуха в лаборатории $t_0 = 20$°C	1
3	Записано выражение (1)	2
4	Проведена касательная к графику в точке t =100°C и пересекает ось τ в точках 7-9 мин в точках 10-12 мин в других точках	 2 1 0
5	Определено по касательной отношение $\Delta t/\tau = 12{,}5$ °C/мин $=$ $0{,}21$ °C/с	1
6	Подставлены числовые значения в (2) и дан ответ k в интервале $14 \div 18\ \frac{\text{Дж}}{\text{°C}\cdot\text{с}}$.	1
	ИТОГО:	**10**