

10.1. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 из пушки, стоящей на горизонтальной поверхности, упал на расстоянии L от нее (при этом $v_0 > \sqrt{Lg}$). Определите возможное время t полета снаряда и угол α с горизонтальной поверхностью, под которым был выпущен снаряд. Ускорение свободного падения g , сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Вариант 1

Воспользуемся формулой расстояния от точки выстрела до точки падения:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad (1)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{Lg}{v_0^2} < 1; \quad (2)$$

Этому синусу соответствуют как минимальный угол

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right), \quad (3)$$

так и максимальный

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right) \right). \quad (4)$$

Далее находим время t как

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \quad (5)$$

или, используя (1),

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6)$$

Подставляя значения (3) и (4) в уравнение (6), и проводя тригонометрические преобразования, получаем два значения времени полета:

$$t_{\min} = \frac{2v_0 \sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)\right)}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)^2}}; \quad (6)$$

$$t_{\max} = \frac{2v_0 \sin\left(\frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{v_0^2}\right) \right)\right)}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2}\right)^2}}. \quad (7)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для расстояния от точки выстрела до точки падения	1
2	Записано уравнение (2) для $\sin 2\alpha$.	1
3	Получены решения (3) и (4) для минимального и максимального угла	2
4	Записано уравнение (5) или (6) для зависимости времени полета от угла с горизонталью.	2

5	Получено выражение (6) для $t_{\min}$ (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
6	Получено выражение (7) для $t_{\max}$ (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
	Сумма	10

Вариант 2

Пусть x – горизонтальная ось, y – вертикальная. Запишем уравнения для точки падения снаряда для каждой из осей:

$$L = v_0 t \cos \alpha ; \quad (1)$$

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} . \quad (2)$$

Выразим из уравнения (2) величину $\sin \alpha$ и подставим в уравнение (1):

$$\sin \alpha = \frac{gt}{2v_0} ;$$

$$L = v_0 t \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = v_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{gt}{2v_0} \right)^2} . \quad (3)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$L^2 = v_0^2 t^2 \left(1 - \frac{g^2 t^2}{4v_0^2} \right) .$$

Сделав замену $t^2 = z$, получим квадратное уравнение:

$$z^2 - \frac{4v_0^2}{g^2} z + \frac{4L^2}{g^2} = 0 . \quad (4)$$

Решаем его через половинный дискриминант:

$$D = \left(\frac{2v_0^2}{g^2} \right)^2 - \frac{4L^2}{g^2} = \frac{4(v_0^4 - L^2 g^2)}{g^4} ;$$

$$z = t^2 = \frac{2v_0^2}{g^2} \pm \frac{2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{g^2} . \quad (5)$$

Минимальному значению времени соответствует знак «минус»:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{2v_0^2 - 2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} . \quad (6)$$

Соответствующий этому времени угол также является минимальным:

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{gt_{\min}}{2v_0} = \frac{g}{2v_0} \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} . \quad (7)$$

$$\sin 2\alpha_{\min} = 2 \sin \alpha_{\min} \cos \alpha_{\min} = \frac{Lg}{v_0^2} .$$

Навесной траектории соответствует максимальное время полета и максимальный угол:

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{2v_0^2 + 2\sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}} ; \quad (8)$$

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Lg}{v_0^2} \right)^2}}. \quad (9)$$

$$\sin 2\alpha_{\max} = 2 \sin \alpha_{\max} \cos \alpha_{\max} = \frac{Lg}{v_0^2}.$$

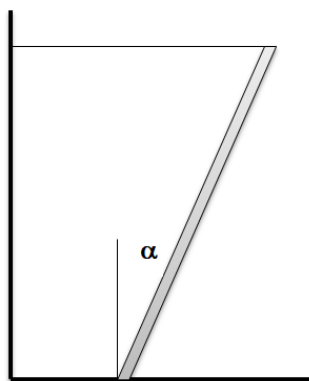
Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для движения по оси x	1
2	Записано уравнение (2) для движения по оси y	1
3	Записано биквадратное (квадратное) уравнение (4) относительно t	2
4	Получено решение (5) квадратного уравнения	2
5	Записано выражение (6) для минимального времени	1
6	Записано выражение (7) для минимального угла	1
7	Записано выражение (8) для максимального времени	1
8	Записано выражение (9) для максимального угла	1
	Сумма	10

10.2. Тонкая палочка длины L и массой M установлена на шероховатой поверхности с коэффициентом трения покоя μ так, что нижним концом она упирается в поверхность под углом α к вертикали, а к верхнему концу прикреплена лёгкая горизонтальная нерастяжимая нить, которая через легкий динамометр прикреплена к стене (см. рисунок).

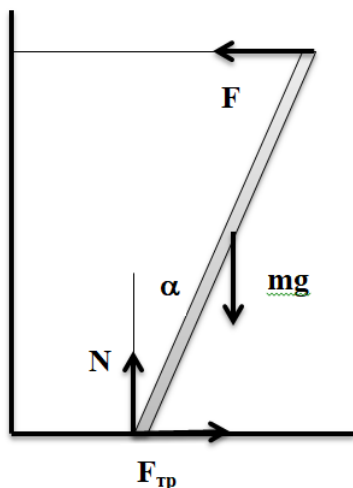
А) Чему равно показание динамометра F при угле наклона α ?

Б) Какой максимальный угол наклона $\alpha_{\max}$ может быть достигнут, чтобы не началось проскальзывание палочки?



Решение.

Нарисуем схему, расставим силы и углы.



Запишем уравнение равенства моментов сил относительно нижней точки палочки:

$$Mg \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} = F \cos \alpha \cdot L. \quad (1)$$

Отсюда

$$F = \frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

В равновесии по оси x выполняется равенство сил:

$$F = F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu Mg; \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq \mu Mg;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 2\mu;$$

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(2\mu). \quad (4)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Нарисована схема, правильно расставлены силы и углы	2
2	Записано уравнение моментов сил $Mg \sin \alpha \cdot \frac{L}{2} = F \cos \alpha \cdot L$	2
3	Получено выражение для силы $F = \frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$	2
4	Записано уравнение $F = F_{\text{тр}} \leq \mu Mg$	2
5	Получено выражение для угла $\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}(2\mu)$ или $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = 2\mu$	2
	Итог	10

10.3. Измерения показывают, что мощность излучения Солнца равна $\alpha = 1,366$ киловатт на квадратный метр поверхности Земли, которая вращается по круговой орбите с периодом $T = 1$ год на расстоянии $R = 150$ млн. км от звезды.

А) Оцените скорость движения Земли вокруг Солнца (в км/с);

Б) Оцените массу Солнца (в кг);

В) Найдите отношение удельной мощности излучения Солнца к удельной тепловой мощности излучения тепла человеком массой $m = 70$ кг, который за сутки потребляет $q = 2400$ килокалорий (в тепло переходит примерно половина потребленной энергии). *Примечание:* 1 калория = 4,2 Джоуля.

Гравитационная постоянная: $G = 6,6743 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$

Решение.

А) Скорость движения Земли вокруг Солнца:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 29,8 \text{ км/с.} \quad (1)$$

Б) Запишем условие движения по круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}; \quad (2)$$

$$M = \frac{v^2 R}{G} = \frac{(2,98 \cdot 10^4 \text{ м/с})^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}}{6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}} \approx 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг} \quad (3)$$

В) Найдём суммарную мощность излучения Солнца. Для этого умножим мощность на кв. метр на площадь сферы с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца:

$$P_c = \alpha S = \alpha \cdot 4\pi R^2 = 1,366 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 \cdot 4\pi (1,5 \cdot 10^{11} \text{ м})^2 \approx 3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт.} \quad (4)$$

Удельная мощность излучения Солнца:

$$P_{c(y\partial)} = \frac{P_c}{M} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт}}{2 \cdot 10^{30} \text{ кг}} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/кг.} \quad (5)$$

Тепловая мощность излучения человеком:

$$P_q = \frac{q}{t} = \frac{0,5 \cdot 2,4 \cdot 10^6 \text{ кал} \cdot 4,2 \text{ Дж/кал}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 58,3 \text{ Вт.} \quad (6)$$

Удельная мощность излучения человека:

$$P_{q(y\partial)} = \frac{P_q}{m} = \frac{58,3 \text{ Вт}}{70 \text{ кг}} \approx 0,83 \text{ Вт/кг.} \quad (7)$$

Отсюда находим отношение:

$$\frac{P_{c(y\partial)}}{P_{q(y\partial)}} \approx 2,3 \cdot 10^{-4} \ll 1. \quad (8)$$

Такой нетривиальный результат обусловлен огромной массой Солнца.

Примечание. Школьники могут подумать о сделанной где-то ошибке и дать в ответе обратную величину порядка 10^4 .

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для скорости движения Земли	1
2	Получено числовое значение для скорости 29,8 км/с (возможно	1

	округление до 30 км/с).	
3	Записано условие движения по круговой орбите (2)	1
4	Получена формула для массы Солнца (3)	1
5	Получено числовое значение для массы Солнца $2 \cdot 10^{30}$ кг	1
6	Найдена суммарная мощность теплового излучения Солнца (4)	1
7	Найдена удельная мощность теплового излучения Солнца (5)	1
8	Найдена суммарная мощность теплового излучения человека (6) При потере множителя 50% – 0,5 балла, дальше не снижаем	1
9	Найдена удельная мощность теплового излучения человека (7)	1
10	Получено числовое значение отношения удельных мощностей теплового излучения Солнца и человека порядка 10^{-4} . При указании в качестве ответа обратной величины – 0 баллов за данный пункт.	1
	Сумма	10

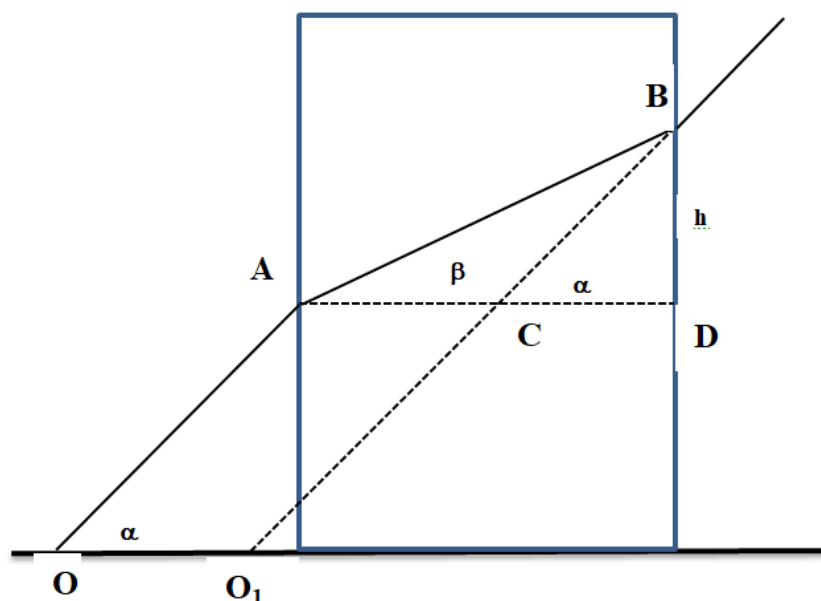
10.4. Точечный источник света помещен на расстоянии $a = 16$ см от плоского зеркала. На какое расстояние сместится изображение источника, если между источником и зеркалом параллельно плоскости зеркала поместить стеклянную плоскопараллельную пластину толщиной $d = 8$ см и показателем преломления $n = 2$? Указание: используйте параксиальное приближение о малости углов.

Решение.

В первом случае расстояния между источником и зеркалом, и между зеркалом и мнимым изображением равны:

$$b_1 = a = 16 \text{ см.} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь качественное прохождение через плоскопараллельную пластину луча света, выпущенного источником под углом α к перпендикуляру к пластинке (см. рисунок).



В точке А луч преломляется и идет под углом β к оси до точки В, в которой снова преломляется на границе с воздухом и идет дальше под углом α . Продолжение этого луча в обратную сторону дает пересечение в точке O_1 . Таким

образом, вставка плоскопараллельной пластины равносильна смещению *вправо* источника света из точки О в точку О₁.

Найдем угол β из закона Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (2)$$

В параксиальном приближении (для малых углов):

$$\alpha = n \cdot \beta. \quad (3)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и CBD. Пусть AC = x, BD = h, AD = d (толщине пластины). Тогда:

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \beta \approx d \cdot \beta; \quad (4)$$

$$h = (d - x) \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx (d - x) \cdot \alpha; \quad (5)$$

Приравниваем:

$$d \cdot \beta = (d - x) \cdot \alpha; \quad (6)$$

Воспользуемся соотношением (3):

$$d = (d - x) \cdot n \quad (7)$$

$$\text{Отсюда } x = d \frac{n-1}{n} = 8 \text{ см} \cdot \frac{2-1}{2} = 4 \text{ см}. \quad (8)$$

$$a_2 = a - x = 12 \text{ см}. \quad (9)$$

Для второго случая расстояние от точки О₁ эффективного размещения источника и расстояние между источником и изображением также равны:

$$b_2 = a_2 = 12 \text{ см}. \quad (10)$$

Мнимое изображение сместится *влево* на $b_2 - b_1 = 4 \text{ см}$.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для первого случая, найдено расстояние от зеркала до изображения	1
2	Построен или качественно описан ход луча в плоскопараллельной пластине	3
3	Записан закон Снеллиуса	1
4	Найдено эквивалентное смещение источника x в параксиальном приближении – формула (8)	2
5	Найдено расстояние до эквивалентного источника a ₂ – формула (9)	1
6	Записана формула (10) для второго случая, найдено расстояние от зеркала до изображения	1
7	Найдено смещение изображения (влево на 4 см).	1
	Сумма	10

10.5. При последовательном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба школьник Вася получает значение сопротивления $R_1 = 63 \text{ Ом}$. При последовательном подключении медного шара и алюминиевого куба тех же размеров – сопротивление $R_2 = 73,5 \text{ Ом}$. Какое сопротивление R_3 покажет омметр

при параллельном подключении алюминиевого шара и медного куба? Удельное сопротивление алюминия равно $\rho_A = 0,028 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$, меди – $\rho_M = 0,0175 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$.

Решение.

Пусть x_1 – геометрический фактор электрического сопротивления для шара, x_2 – для куба. Тогда сопротивление при последовательном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба:

$$R_1 = \rho_A x_1 + \rho_M x_2. \quad (1)$$

При последовательном подключении медного шара и алюминиевого куба тех же размеров:

$$R_2 = \rho_M x_1 + \rho_A x_2. \quad (2)$$

Умножим уравнение (1) на ρ_A , уравнение (2) – на ρ_M , и вычтем второе уравнение из первого:

$$R_1 \rho_A - R_2 \rho_M = \rho_A^2 x_1 - \rho_M^2 x_1;$$

$$x_1 = \frac{R_1 \rho_A - R_2 \rho_M}{\rho_A^2 - \rho_M^2} \approx 1000 \text{ м/мм}^2. \quad (3)$$

Аналогично можно получить

$$x_2 = \frac{R_2 \rho_A - R_1 \rho_M}{\rho_A^2 - \rho_M^2} \approx 2000 \text{ м/мм}^2. \quad (4)$$

При параллельном подключении алюминиевого шара и медного куба сопротивление будет равно:

$$R_3 = \frac{\rho_A x_1 \cdot \rho_M x_2}{\rho_A x_1 + \rho_M x_2} = \frac{28 \text{ Ом} \cdot 35 \text{ Ом}}{63 \text{ Ом}} \approx 15,6 \text{ Ом}. \quad (5)$$

Примечание: подставив выражения (3) и (4) в формулу (5), получим:

$$R_3 = \frac{\rho_A \rho_M (R_1 \rho_A - R_2 \rho_M)(R_2 \rho_A - R_1 \rho_M)}{R_1 (\rho_A^2 - \rho_M^2)^2} \quad (6)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Есть идея геометрических факторов для шара и куба (ставим за этот пункт полный балл при наличии уравнений (1) и (2)).	1
2	Записана формула (1) для последовательного подключения к омметру алюминиевого шара и медного куба	1
3	Записана формула (2) для последовательного подключения к омметру алюминиевого куба и медного шара	1
4	Получено выражение (3) для геометрического фактора шара	1
5	Получено числовое значение 1000 м/мм^2 для геометрического фактора шара или сопротивление любого шара. При наличии формулы (6) добавляем этот балл к п. 9.	1
6	Получено выражение (4) для геометрического фактора куба	1
7	Получено числовое значение 2000 м/мм^2 для геометрического фактора куба или сопротивление любого куба. При наличии	1

	формулы (6) добавляем этот балл к п. 9.	
8	Записана формула (5) при параллельном подключении к омметру алюминиевого шара и медного куба	1
9	Найдено числовое значение $R_3 = 15,6$ Ом (наличие формулы (6) необязательно при наличии числовых значений для геометрических факторов). Допустим целочисленный ответ 15 Ом или 16 Ом.	2
	Сумма	10