

Возможные решения и критерии оценивания 10 класс

1. Склон горы составляет угол α с горизонтом. В момент времени $t=0$ на поверхности склона взорвалась граната, и множество осколков полетели во все стороны, причем начальная скорость всех осколков одинаковая по модулю. Оказалось, что осколки падали на склон в течение промежутка времени Δt . На какое максимальное расстояние осколки удалялись от склона?

Считайте склон очень длинным. Силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

Возможное решение:

Самый первый осколок упал на склон в момент взрыва, поскольку граната находилась на склоне. Поэтому Δt – это время падения последнего осколка. Движение осколков от склона и к нему определяется проекциями векторов начальной скорости и ускорения на направление, перпендикулярное склону. А поскольку ускорение у всех осколков одинаковое, то это их движение зависит от проекции вектора начальной скорости. В частности, очевидно, что дольше всех будет лететь тот осколок, вектор начальной скорости которого перпендикулярен склону.

Так как проекция ускорения свободного падения на направление, перпендикулярное склону, есть $a_n = g \cos \alpha$, то время движения этого осколка есть $\Delta t = \frac{2v_0}{a_n} = \frac{2v_0}{g \cos \alpha}$

Отсюда находим начальную скорость осколков $v_0 = \frac{g \Delta t \cos \alpha}{2}$

Тот же осколок, вектор начальной скорости которого перпендикулярен склону, удалится от него на максимальное расстояние. Зависимость проекции его скорости на ось y , которая перпендикулярна склону, и координаты по этой оси от времени даются соотношениями $v_y(t) = v_0 - g \cos \alpha t$, $y(t) = v_0 t - \frac{g \cos \alpha t^2}{2}$

Расстояние от осколка до склона будет максимально, когда его скорость параллельна склону, т.е. когда $v_y = 0$. Отсюда находим время до этого момента $t_1 = \frac{v_0}{g \cos \alpha}$. подставляя которое во второе

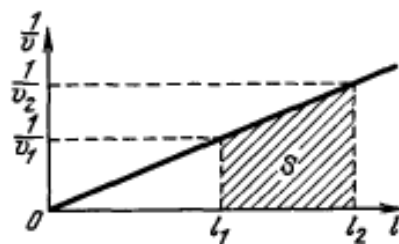
уравнение найдем максимальное расстояние от осколков до склона $h = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha} = \frac{g \Delta t^2 \cos \alpha}{8}$.

№	Критерий	Баллы
1	Идея о том, что время падения определяется проекциями начальной скорости и ускорения на перпендикуляр к наклонной плоскости	2
2	Получено математическое выражение проекции ускорения $a_n = g \cos \alpha$	1
3	Получено математическое выражение проекции начальной скорости $v_0 = \frac{g \Delta t \cos \alpha}{2}$	1
4	Проведен анализ зависимости угла наклона вектора начальной скорости к наклонной плоскости и времени падения	2
5	Выведено выражение для времени, соответствующего максимальному удалению $t_1 = \frac{v_0}{g \cos \alpha}$	2
6	Получен ответ $h = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha} = \frac{g \Delta t^2 \cos \alpha}{8}$	2

2. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке А на расстоянии $l_1=1\text{ м}$ от центра муравейника, его скорость равна $v_1=2\text{ см/с}$. За какое время τ муравей добежит от точки А до точки В, которая находится на расстоянии $l_2=2\text{ м}$ от центра муравейника?

Возможное решение:

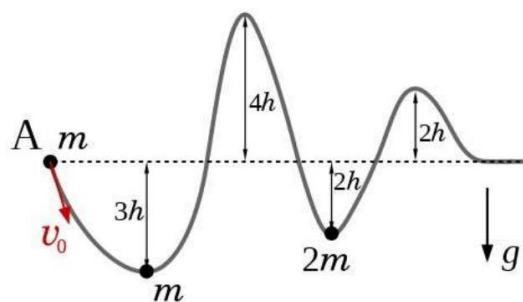
Скорость муравья меняется со временем не по линейному закону. Поэтому средняя скорость на разных участках пути различна, и пользоваться для решения известными формулами для средней скорости нельзя. Разобьем путь муравья от точки А до точки В на малые участки, проходимые за одинаковые промежутки времени Δt . Тогда $\Delta t = \frac{\Delta l}{v_{\text{cp}}(\Delta l)}$, где $v_{\text{cp}}(\Delta l)$ - средняя скорость на данном отрезке Δl . Эта формула подсказывает идею решения задачи: нарисуем зависимость величины $\frac{1}{v_{\text{cp}}(\Delta l)}$ от l на пути от точки А до точки В. Этот график - отрезок прямой (рис.); заштрихованная на рисунке площадь S под этим отрезком численно равна искомому времени. Вычислим ее: $S = \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2} (l_2 - l_1) = \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_1} \frac{l_2}{l_1} \right) (l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1}$ (так как $\frac{1}{v_2} = \frac{l_2}{v_1 l_1}$).



Таким образом, муравей добегит от точки А до точки В за время $\tau = \frac{(2m)^2 - (1m)^2}{2 \cdot 2 \frac{m}{c} \cdot 1m} = 75 \text{ с}$.

№	Критерий	Баллы
1	Идея использования графика $\frac{1}{v}(l)$ для расчета времени движения как площади под графиком	4
2	Обоснована возможность п.1	2
3	Получено выражение для расчета площади трапеции $S = \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2} (l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1}$	2
4	Проведены вычисления и получен верный ответ	2
	За арифметические ошибки и ошибки в переводе единиц измерения снимается по 1 баллу	
	Max	10

3. На проволоке, изогнутой как показано на рисунке, разместили бусинки массами m , m , $2m$. С какой скоростью необходимо отпустить бусинку из точки А, чтобы бусинка $2m$ вышла на горизонтальный участок проволоки? Две других бусинки изначально покоятся, трением пренебречь, столкновения бусинок абсолютно упругие. Высота h задана.



Возможное решение:

При определении минимального значения v_0 нужно потребовать, чтобы нижняя бусинка массы m “перевалилась” через горку $4h$, а бусинка массы $2m$ — через горку $2h$. Сформулируем последовательно данные два условия в виде соответствующих неравенств. В первую очередь заметим, что при столкновении бусинок массами m , первая бусинка (начальная скорость которой v_0) останавливается и передает всю свою энергию второй бусинке, которая изначально покоилась. Данный факт полностью отвечает законам сохранения энергии и импульса. Таким образом, искомое условие будет таким же, как если бы нижней бусинки массы m не было вовсе.

Из закона сохранения энергии следует требование $\frac{mv_0^2}{2} > mg \cdot 4h$, что эквивалентно $v_0^2 > 4gh$ (1).

Заметим, что величина $3h$ никак не влияет на ответ к задаче. Рассмотрим дальнейшее движение бусинки. Если выполнено условие (1), то бусинка скатится вниз и столкнется с бусинкой массы $2m$ со скоростью v_1 , которую также легко найти из закона сохранения энергии: $\frac{mv_0^2}{2} + mg \cdot 2h =$

$$\frac{mv_1^2}{2}. (2)$$

Пусть в результате столкновения бусинка массы m отскочит влево со скоростью v_2 , а бусинка массы $2m$ начнет движение вправо со скоростью u . Чтобы выразить эти скорости через v_1 воспользуемся законами сохранения импульса и энергии: $mv_1 = 2mu - mv_2$ (3), $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2mu^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$ (4) Решая совместно эти два уравнения, приходим к следующему результату: $u = \frac{2}{3}v_1$ и $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ (5) Теперь необходимо, чтобы бусинка массы $2m$ смогла достичь вершины $2h$. Данное условие запишется в виде: $\frac{2mu^2}{2} > 2mg \cdot (2h + 2h)$ (6) Используя теперь выражение (5) для u и выражение (3) для v_1 , переписываем требование (6) в следующей форме: $v_0^2 > \frac{1}{2}g(5 \cdot 2h + 9 \cdot 2h)$ (7). Получаем $v_0^2 > 14gh$. Таким образом, бусинка массы $2m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{14gh}$. В случае $v_0 = \sqrt{14gh}$ бусинка будет бесконечно долго “переваливаться” через последнюю горку.

Ответ: бусинка массы $2m$ выйдет на горизонтальный участок при $v_0 > \sqrt{14gh}$.

№	Критерий	Баллы
1	Записан закон сохранения импульса при столкновении	2
2	Записан закон сохранения энергии	2
3	Определены скорости бусинок после столкновения	4
4	Получен верный ответ	2
	Если участником найдено и строго обосновано значение скорости сближения бусинок после первого столкновения, то он получает 8 баллов за пункты 1-3.	
	Max	10

4. Электрический нагреватель находится внутри бака с водой. При включении на время $t_1 = 30$ с нагревателя мощности $N_1 = 1$ кВт температура воды в идеально теплоизолированном баке поднялась от $T_0 = 17^\circ\text{C}$ до $T_1 = 37^\circ\text{C}$. Тепловую изоляцию сняли, а мощность нагревателя уменьшили до $N_2 = 0,9$ кВт, из-за чего температура воды в баке за время $t_2 = 20$ с выросла от $T_1 = 37^\circ\text{C}$ до $T_2 = 47^\circ\text{C}$. Какое количество тепла за время t_2 ушло через стенки бака?

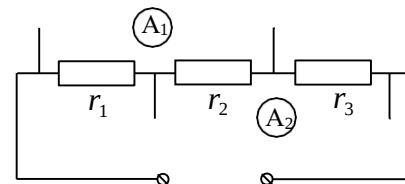
Возможное решение:

Так как первоначально система изолирована, вся энергия нагревателя идет на нагревание воды и бака. $N_1 t_1 = C(T_1 - T_0)$, где C – теплоемкость воды и бака.

Во втором случае энергия нагревателя тратится на нагрев системы и потери в окружающую среду $N_2 t_2 = C(T_2 - T_1) + Q_{\text{потерь}}$. Тогда $Q_{\text{потерь}} = N_2 t_2 - N_1 t_1 \frac{(T_2 - T_1)}{(T_1 - T_0)} = 3000$ Дж.

№	Критерий	Баллы
1	Записан закон сохранения энергии для первого случая $N_1 t_1 = C(T_1 - T_0)$	3
2	Записан закон сохранения энергии для второго случая с учетом тепловых потерь $N_2 t_2 = C(T_2 - T_1) + Q_{\text{потерь}}$	3
3	Получено выражение для расчета потерь в окружающую среду $Q_{\text{потерь}} = N_2 t_2 - N_1 t_1 \frac{(T_2 - T_1)}{(T_1 - T_0)}$	2
4	Проведены вычисления и получен верный ответ	2
	За арифметические ошибки и ошибки в единицах измерения снимается по 1 баллу	
	Max	10

5. Из резисторов r_1 , r_2 и r_3 , идеальных амперметров и проводов собрали электрическую цепь. Когда к цепи приложили некоторое электрическое напряжение, показания амперметров составили $I_1=I$ (амперметра A_1), $I_2=2I/3$ (амперметра A_2). Найти r_2 и r_3 , если известно, что:

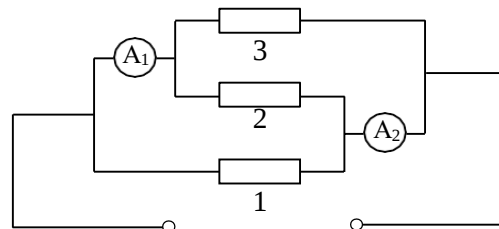


(1) $r_1=r$,

(2) сопротивления двух резисторов равны друг другу, третьего – отличается от них.

Возможное решение:

Если бы совпадали сопротивления крайних резисторов, ток через амперметры был бы одинаковым. Поэтому есть две возможности – равны друг другу сопротивления второго и третьего резисторов $r_2=r_3$ (а



сопротивление первого от них отличается), или равны друг другу сопротивления первого и второго резисторов $r_1=r_2$ (а отличным от них является третье сопротивление). Поскольку амперметры не имеют сопротивлений, резисторы включены в цепь параллельно источнику, причем амперметр A_1 измеряет ток, текущий через второй и третий резисторы, амперметр A_2 – через первый и второй (см. рисунок).

Поэтому $i_2+i_3=I_1=I$; $i_1+i_2=I_2=2I/3$ (*), где i_1 , i_2 и i_3 токи, текущие через первый, второй и третий резисторы соответственно.

В первом случае, когда $r_2=r_3$, равны друг другу токи i_2 и i_3 . Поэтому из системы уравнений (*) находим $i_2=i_3=I/2$, $i_1=I/6$. А поскольку токи через резисторы определяются законом Ома для участка цепи $i_n = \frac{U}{r_n}$, где U -приложенное к цепи напряжение, $n=1,2,3$, заключаем, что в этом случае сопротивление второго и третьего резисторов втрое меньше сопротивления первого $r_2 = r_3 = \frac{r}{3}$

Во втором случае $r_1=r_2=r$, $i_1=i_2=I/3$, $i_3=2I/3$. И, следовательно, сопротивление третьего резистора вдвое меньше сопротивления первого и второго $r_2 = r$, $r_3 = \frac{r}{2}$.

Таким образом, с данными условия совместимы два решения:

первое решение: $r_1 = r$, $r_2 = r_3 = \frac{r}{3}$;

второе решение: $r_1 = r$, $r_2 = r$, $r_3 = \frac{r}{2}$.

№	Критерий	Баллы
1	Верно интерпретирована схема соединения резисторов (параллельное соединение)	2
2	Рассмотрены и обоснованы два возможных варианта равных сопротивлений: 1) $r_2=r_3$ 2) $r_1=r_2$	4
3	Верно дано распределение токов, текущих через резисторы и амперметры	2
4	Решена система уравнений и получен верный ответ	2
	Max	10