

10.1. Равномерно или ускоренно? (Рубцов Д.) Внешний диаметр скотча при разматывании уменьшается с постоянной скоростью $D(t) = D_0 - ut$. Как зависит от времени длина размотанной части скотча $x(t)$? Явно выпишите параметры полученной зависимости $x(t)$, например, начальную скорость увеличения длины размотанной части v_0 и ускорение a (если оно постоянно), с которой эта скорость изменяется. Считайте известными начальный диаметр скотча D_0 , скорость u и толщину скотча h .

Решение.

Объем ленты скотча при разматывании не изменяется. Пусть внутренний диаметр скотча d , а ширина скотча l . Тогда начальный объем скотча $V = \frac{\pi(D_0^2 - d^2)}{4} l$. В произвольный момент времени после разматывания объем скотча $V = \frac{\pi((D_0 - ut)^2 - d^2)}{4} l + x(t)hl$. Из равенства объемов следует

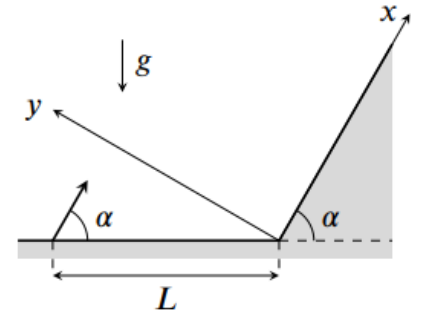
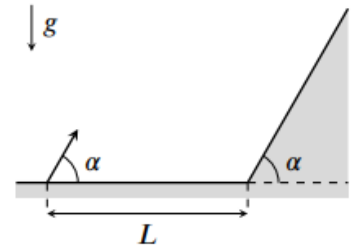
$$x(t) = \frac{\pi D_0 u}{2h} t - \frac{\pi u^2}{2h} t^2 = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Таким образом, начальная длина размотанной части скотча увеличивается со скоростью $v_0 = \frac{\pi D_0 u}{2h}$. Эта скорость, в свое время, по ходу движения уменьшается со скоростью $a = \frac{\pi u^2}{2h}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Идея сохранения объемов	2 балла
2	Начальный объем $\frac{\pi(D_0^2 - d^2)}{4} l$ или $\frac{\pi D_0^2}{4} l$	1 балл
3	Объем рулона в произвольный момент времени $\frac{\pi((D_0 - ut)^2 - d^2)}{4} l$ или $\frac{\pi(D_0 - ut)^2}{4} l$	1 балл
4	Объем размотанной части скотча в произвольный момент времени $x(t)hl$	1 балл
5	$x(t) = \frac{\pi D_0 u}{2h} t - \frac{\pi u^2}{2h} t^2$	2 балла
6	$v_0 = \frac{\pi D_0 u}{2h}$	1 балл
7	$a = \frac{\pi u^2}{2h} \text{ или } a = -\frac{\pi u^2}{2h}$	2 балла

10.2. Кидаем в гору! (по мотивам МЭ ВСОШ Татарстана, автор Заяц А.Е.) На расстоянии L от начала наклонной плоскости, поверхность которой образует угол α с горизонтом, бросают камень со скоростью v_0 под таким же углом к горизонту в сторону наклонной плоскости. Определите время полета камня. Наклонная плоскость длинная, сопротивления воздуха нет. Ускорение свободного падения g .



Решение.

Пусть скорость v_0 небольшая, так что камень не долетает до наклонной плоскости. Время полета в этом случае, очевидно, $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Этот ответ имеет смысл при дальности полета $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ меньше L .

Способ 1 («изящный»). Если скорость довольно большая, такая, что камень долетает до наклонной плоскости, для нахождения времени полета удобно записать уравнение движения на ось, перпендикулярную наклонной плоскости. Пусть нуль этой оси 0_y находится у подножия наклонной плоскости. Тогда начальная координата камня $y_0 = L \sin \alpha$, проекция начальной скорости $v_{y0} = 0$, а проекция ускорения $a_y = -g \cos \alpha$.

Прилет на гору означает $y(t) = 0$. Так что $L \sin \alpha - \frac{g \cos \alpha t^2}{2} = 0$ и время полета $t = \sqrt{\frac{2L \tan \alpha}{g}}$.

Способ 2 («обычный»). Пусть камень падает на наклонную плоскость на расстоянии S от ее начала. Уравнение движения на «обычные» горизонтальную и вертикальную оси

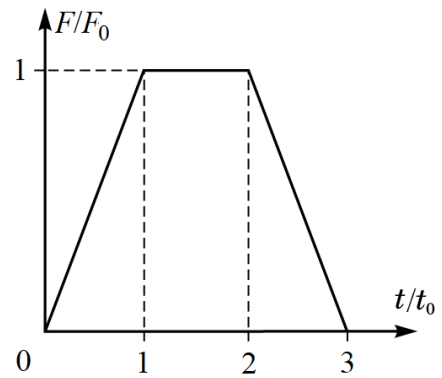
$L + S \cos \alpha = v_0 \cos \alpha t$ и $S \sin \alpha = v_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$. Из этих уравнений следует тот же ответ

$$t = \sqrt{\frac{2L \tan \alpha}{g}}. \text{ Ответ: } t = \begin{cases} \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} & \text{при } \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq L \\ \sqrt{\frac{2L \tan \alpha}{g}} & \text{при } \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} > L \end{cases}$$

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Есть понимание, что камень может приземлиться как на наклонной, так и на горизонтальной плоскости	1 балл
2	$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$	2 балла
3	Условие применимости ответа $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq L$	1 балл
4	Записаны уравнения движения (одно или два в зависимости от хода решения) в случае падения на наклонную плоскость	4 балла
5	$t = \sqrt{\frac{2L \tan \alpha}{g}}$	2 балла

10.3.В бассейне (Рубцов Д.). Пловец массой $m = 50$ кг отталкивается от бортиков бассейна. Сила давления от бортика изменяется так, как показано на рисунке (величины $F_0 = 1$ кН и $t_0 = 0,1$ с считайте известными). Определите:



- 1) скорость пловца v_0 сразу после толчка;
- 2) расстояние L от бортика, на котором остановится пловец, если после толчка не будет прилагать усилий.

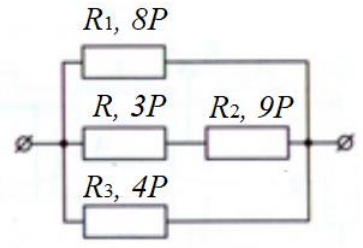
Сила сопротивления, действующая со стороны воды на пловца, пропорциональна его скорости $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ ($k = 100 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$). Смещением пловца за время отталкивания можно пренебречь. Сила тяжести пловца компенсируется силой Архимеда. Движение пловца горизонтально.

Решение:

- 1) За малое время Δt импульс силы давления равен $F(t)\Delta t$. Геометрически это площадь маленького столбика под графиком $F(t)$. За всё время отталкивания импульс силы давления тогда равен полной площади под графиком $p_0 = 2F_0t_0$. Этот импульс идет на изменение импульса пловца mv_0 . Таким образом, $p_0 = 2F_0t_0 = mv_0$ и $v_0 = \frac{2F_0t_0}{m} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 2) Далее при движении на пловца действует только сила сопротивления $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, так как силы тяжести и Архимеда скомпенсированы. В проекции на горизонтальную ось второй закон Ньютона принимает вид $ma_x = -kv_x$. Домножим это уравнение на малое время Δt . Получим $ma_x\Delta t = -kv_x\Delta t$. Заметим, что $a_x\Delta t = \Delta v_x$ — это малое изменение проекции скорости, а $v_x\Delta t = \Delta x$ — небольшое изменение координаты пловца. Тогда $m\Delta v_x = -k\Delta x$. Суммируя это выражение от момента достижения максимальной скорости после толчка до полной остановки пловца, получаем $m(0 - v_0) = -kL$, то есть $L = \frac{mv_0}{k} = \frac{p_0}{k} = \frac{2F_0t_0}{k} = 2$ м.

1	Доказательство, что импульс силы давления — это площадь под графиком	2 балла
2	Найден импульс силы давления $2F_0t_0$	1 балл
3	Есть формула импульса пловца mv_0	1 балл
4	Импульс силы идет на изменение импульса пловца (в формульном или любом другом виде)	1 балл
5	$v_0 = \frac{2F_0t_0}{m} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	1 балл
6	2 закон Ньютона на горизонтальную проекцию $ma_x = -kv_x$	1 балл
7	Идея домножения на Δt и суммирования	2 балла
8	$L = \frac{mv_0}{k} = \frac{p_0}{k} = \frac{2F_0t_0}{k} = 2$ м	1 балл

10.4. Разные мощности (Рубцов Д.). Считая известными соотношения между мощностями, выделяющимися на резисторах, а также одно из сопротивлений R , определите сопротивления остальных трех резисторов R_1, R_2, R_3 .



Решение:

Через резисторы R и R_2 текут токи одинаковой силы I . Выделяющиеся на них мощности $3P = I^2 R$ и $9P = I^2 R_2$. Тогда $R_2 = 3R$. Суммарное сопротивление средней ветви $R + R_2 = 4R$.

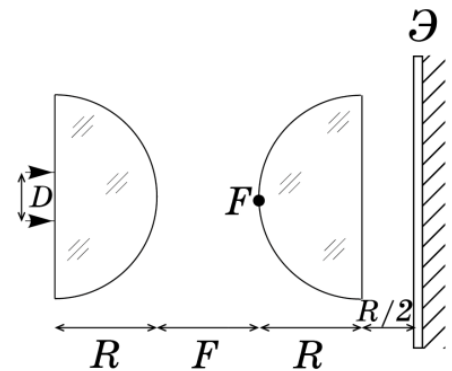
На всех трех ветвях падает одинаковое напряжение U . Выделяющиеся мощности на каждой ветви $8P = \frac{U^2}{R_1}$, $12P = \frac{U^2}{4R}$ и $4P = \frac{U^2}{R_3}$. Откуда $R_1 = 6R$ и $R_3 = 12R$.

Критерии оценивания (10 баллов)

Задачу можно решать различными способами. Приведем примерную схему оценивания

1	Продemonстрировано знание о том, что при последовательном соединении одинаковы силы тока, а при параллельном - напряжения	2 балла
2	Продemonстрированы знания формул мощности $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ (какие-нибудь, в зависимости от хода решения)	2 балла
3	$R_1 = 6R$	2 балла
4	$R_2 = 3R$	2 балла
5	$R_3 = 12R$	2 балла

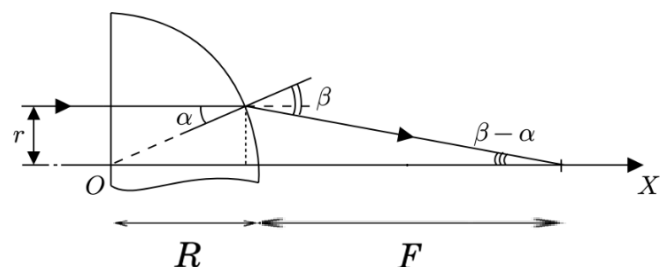
10.5. Работают оба полушария. На стеклянное полушарие радиусом R попадает узкий пучок света диаметром $D \ll R$. После преломления в этом полушарии пучок света фокусируется в точке F . К этой точке приставляют другое такое же полушарие, а на расстоянии $R/2$ от второго полушария ставят экран. Показатель преломления стекла равен n . Пучок света и оба полушария соосны. Отражением пренебечь. Определите фокусное расстояние F и площадь светового пятна на экране. При каких показателях преломления стекла площадь светового пятна будет больше, чем исходная площадь пучка?



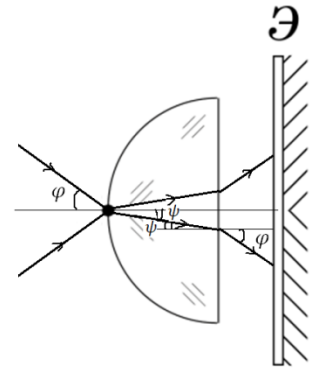
Решение (Рубцов Д.)

Рассмотрим луч, падающий на левое полушарие на расстоянии r от оси симметрии системы. При входе в полушарие нормальный луч не преломляется.

При выходе из полушария угол его падения α : $\sin \alpha = \frac{r}{R}$. Угол преломления β находится из закона Снелла $n \sin \alpha = \sin \beta$.



Угол наклона к оси симметрии системы преломленного луча равен $(\beta - \alpha)$. Его также можно найти из геометрических соотношений $\tan(\beta - \alpha) \approx \frac{r}{F}$. Из предыдущих уравнений и из свойства малых углов $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ получаем $F = \frac{R}{n-1}$. Заметим, что ответ в приближениях задачи не зависит от r , то есть, действительно, весь пучок соберется в одной точке.



Максимальный угол падения на второе полушарие равен

$\varphi = (\beta - \alpha)_{\text{макс}} \approx (n - 1)\alpha_{\text{макс}} = \frac{(n-1)D}{2R}$. Тогда максимальный угол преломления ψ легко находится из закона Снелла $\sin \varphi = n \sin \psi$. С учетом малости углов $\psi \approx \frac{(n-1)D}{2Rn}$. При выходе из второго полушария угол падения будет ψ , а угол преломления, очевидно, ψ (как в плоскопараллельной пластине).

Таким образом, радиус светового пятна на экране равен $\rho = R \tan \psi + \frac{R}{2} \tan \varphi \approx R \left(\frac{(n-1)D}{2Rn} + \frac{(n-1)D}{4R} \right) = R \frac{(n-1)D}{2R} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)D(n+2)}{4n}$, а его площадь $S = \pi \rho^2 = \pi \left(\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} \right)^2$. Эта площадь больше, чем площадь исходного светового пучка $S_0 = \frac{\pi D^2}{4}$ при $\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} > \frac{D}{2}$, то есть при $n^2 - n - 2 > 0$ или $n \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Физический смысл имеет только ограничение $n > 2$. Материалы с таким показателем преломления есть, например, алмаз ☺.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Написано, что нормальные лучи не преломляются	0,5 балла
2	Закон Снелла при выходе из первого полушария $n \sin \alpha = \sin \beta$.	1 балл
3	Углы выражены через геометрические размеры $\sin \alpha = \frac{r}{R}$ и $\tan(\beta - \alpha) \approx \frac{r}{F}$	2 балла
4	Приближение малых углов $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$	0,5 балла
5	$F = \frac{R}{n-1}$	1 балл
6	Найдено, что угол раствора сходящегося пучка равен $\varphi = \frac{(n-1)D}{2R}$	1 балл
7	Законы Снелла для крайних лучей при входе и при выходе из второго полушария $\sin \varphi = n \sin \psi$	0,5 балла
8	Найдено вертикальное смещение крайних лучей во втором полушарии $R \tan \psi$	0,5 балла
9	Найдено дополнительное вертикальное смещение крайних лучей вне второго полушария $\frac{R}{2} \tan \varphi$	0,5 балла
10	Радиус светового пятна $\rho = \frac{(n-1)D(n+2)}{4n}$	0,5 балла
11	Площадь светового пятна $S = \pi \rho^2 = \pi \left(\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} \right)^2$	1 балл
12	При $n > 2$ площадь светового пятна будет больше, чем исходная площадь пучка	1 балл