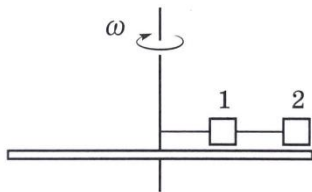


1. «Вращающийся диск»

Горизонтальный диск вращают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . На поверхности диска в гладкой радиальной канавке находятся связанные нитью грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0,1$ кг, $m_2 = 0,2$ кг. Радиусы их вращения равны $R_1 = 0,1$ м, $R_2 = 0,2$ м. Найдите отношение сил натяжения нитей.



Возможное решение:

1. Так как диск вращается равномерно, следовательно, по второму закону Ньютона для тела 1 и 2 соответственно получаем $T_1 - T_2 = m_1 \omega^2 R_1$, $T_2 = m_2 \omega^2 R_2 \Rightarrow T_1 = m_2 \omega^2 R_2 + m_1 \omega^2 R_1$
2. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2 \omega^2 R_2 + m_1 \omega^2 R_1}{m_2 \omega^2 R_2} = 1 + \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} = 1,25$

Система оценивания задачи:

Написан второй закон Ньютона для двух тел – **3 балла**

Выражено центростремительное ускорение через угловую скорость – **2 балла**

Написана конечная формула расчёта из пункта 2 – **4 балла**

Найдено численное значение отношения сил натяжения нитей – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Предохранитель»

Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нём равно 10 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить втрое, а диаметр в 4 раза?

Возможное решение:

- 1) По закону Джоуля-Ленца количество теплоты, выделяющееся на проводнике температурой T , находящемуся под напряжением U , длиной l , диаметром d , удельным сопротивлением ρ за единицу времени равно $P_Q = \frac{\pi d^2 U^2}{4 \rho l}$.
- 2) По закону Ньютона-Рихмана мощность теплопередачи может быть рассчитана так: $P = aS(T - T_{\text{окр}}) = \pi d l (T - T_{\text{окр}})$, где $\pi d l$ – площадь поверхности проводника.
- 3) При тепловом равновесии $P_Q = P$.
- 4) Из п.3 найдём напряжение на проводнике, при котором он нагревается до температуры T : $U = 2l \sqrt{\frac{a \rho (T - T_{\text{окр}})}{d}}$
- 5) При длине проводника втрое больше, а диаметре вдвое больше, напряжение будет равно $U_1 = 6l \sqrt{\frac{a \rho (T - T_{\text{окр}})}{4d}} = U \sqrt{\frac{9}{4}} = 15$ В

Система оценивания задачи:

Записан закон Джоуля-Ленца – **1 балл**

Получено выражение из п.1 – **1 балл**

Записан закон Ньютона-Рихмана из п.2 – **2 балла**

Записано уравнение теплового баланса – **2 балла**

Найдена зависимость напряжения от температуры, длины и диаметра из п.4 – **3 балла**

Найдено значение напряжения из п.5 – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. Андрей приехал в гости на дачу к бабушке и дедушке. С помощью кипятильника Андрей вскипятил воду в чайнике за время t , подключив кипятильник в розетку с напряжением 110 В. Бабушка Андрея сказал ему, что превышение мощности кипятильника на 20% приводит к выходу кипятильника из строя. Как с помощью двух таких кипятильников вскипятить то же количество воды в чайнике, если напряжение в розетке вырастет до городских 220 В? Какое время на это потребуется? Потерями тепла можно пренебречь.

Возможное решение:

- 1) Если в сеть с напряжением в 220 В включить кипятильник, рассчитанный на напряжение 110 В, то мощность, выделяемая на нём вырастет в 4 раза, т.к. $P = \frac{U^2}{R}$, $R = \text{const}$. Следовательно, одним кипятильником не получится это сделать.
- 2) Подключить два кипятильника можно последовательно или параллельно. Если подключить параллельно, то на каждом кипятильнике будет выделяться мощность больше, чем положено. Следовательно, подключать так нельзя.
- 3) Если подключить их последовательно, то на каждом кипятильнике будет по 110 В, общее сопротивление будет равно $2R$, а общая мощность будет равна $2P$.
- 4) Так как количество теплоты, необходимое для кипячения чайника равно $Q = Pt$, с двумя кипятильниками $Q = 2Pt_1$, следовательно $t_1 = \frac{t}{2}$.

Система оценивания задачи:

Указано, что включать один кипятильник нельзя – **2 балла**

Указано, что параллельно их включать тоже нельзя – **3 балла**

Показано, почему можно включать последовательно – **3 балла**

Найдено искомое время – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Корабль Знаяки»

Двигаясь на космическом корабле по круговой орбите, Знаяка заметил, что радиус орбиты их корабля уменьшился на 2%. Он предположил, что это происходит в результате трения в верхних слоях атмосферы. Орбита всё ещё осталась круговой, как и была. Что стало с механической энергией, скоростью и периодом обращения космического корабля Знаяки? Потенциальная энергия взаимодействия точечного тела с Землёй на расстоянии r может быть рассчитана по формуле $E = -\frac{GmM}{r}$, где M – масса Земли, m – масса тела, G – гравитационная постоянная.

Возможное решение:

- 1) Механическая энергия корабля может быть рассчитана по формуле $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$.
- 2) Пусть на поверхности Земли ускорение свободного падения равно g , а радиус Земли равен R . Тогда для тела, вращающегося под действием силы тяготения на орбите с радиусом R можно второй закон Ньютона записать так: $mg = \frac{mv^2}{R}$, а по закону всемирного тяготения имеем

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM.$$

3) Если тело движется под действием силы тяготения на расстоянии r от Земли, то $\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{gR^2}{r} \Rightarrow E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = -\frac{mgR^2}{2r} \quad (1)$$

$$4) \quad \Delta E = E(r + \Delta r) - E(r) = -\frac{mgR^2}{2(r+\Delta r)} + \frac{mgR^2}{2r} = \frac{mgR^2}{2r} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right) = \frac{mgR^2}{2r} * \left(1 - \frac{1 - \frac{\Delta r}{r}}{1 - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2} \right) \approx$$

$$-E(r) * \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E(r)} = -\frac{\Delta r}{r} = -0,02 \Rightarrow \text{механическая энергия уменьшилась на } 2\%$$

$$5) \quad (v + \Delta v)^2 = \frac{gR^2}{r + \Delta r} \Rightarrow v^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 = \frac{gR^2}{r} * \frac{1 - \frac{\Delta r}{r}}{1 - \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}, \text{ тогда (аналогично предыдущему пункту)}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v}\right), \quad \frac{gR^2}{r} * \frac{1 - \frac{\Delta r}{r}}{1 - \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2} \approx \frac{gR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) \Rightarrow v^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{gR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta r}{2r} = 0,01 \Rightarrow \text{скорость корабля увеличилась на 1\%}$$

$$6) \quad T(r + \Delta r) = \frac{2\pi(r + \Delta r)}{v + \Delta v} = \frac{2\pi r}{v} * \frac{1 + \frac{\Delta r}{r}}{1 + \frac{\Delta v}{v}} \approx T(r) * \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right) \approx T(r) * \left(1 + \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{\Delta T}{T} =$$

$$\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v} = -0,03 \Rightarrow \text{период уменьшился на } 3\%$$

Система оценивания задачи:

Выведена формула (1) – 1 балл

Рассчитана $\frac{\Delta E}{E(r)}$ – 3 балла

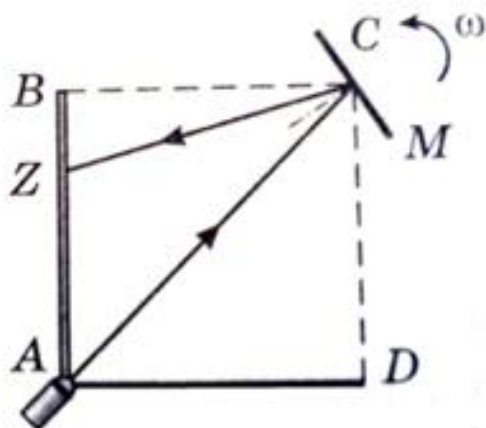
Рассчитана $\frac{\Delta v}{v}$ – 3 балла

Рассчитана $\frac{\Delta T}{T}$ – 3 балла

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

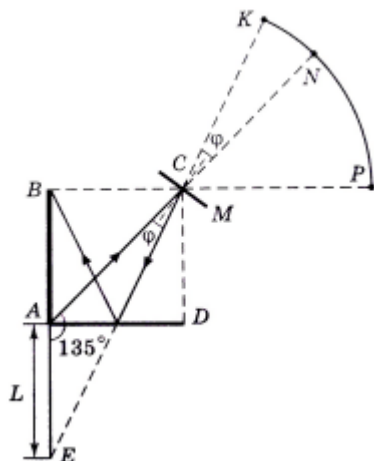
5. «Бегущий зайчик»

Коля из небольшого отверстия в ребре А в центр зеркала СМ светит лучом лазера. Зеркало равномерно вращается вокруг оси, проходящей через точку, в которую падает луч лазера, и совершает один оборот за время $T = 12$ мин. Экран АВ и плоское зеркало АД образуют две боковые грани прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Вид сверху на эту систему показан на рисунке. В течение какого времени t лазерный зайчик Z бежит по экрану АВ, если зеркало совершает один оборот?



Возможное решение:

- 1) Лазерный зайчик может скользить по экрану АВ в результате как отражения лазерного луча непосредственно от зеркала СМ, так и последовательного отражения от зеркала СМ и зеркала АД. Дуга КNP представляет собой геометрическое место изображений лазера, излучение от которых попадает на экран АВ. На рисунке показано крайнее положение луча в конечный момент времени, когда лазерный зайчик ещё на экране.



- 2) Угол $\text{NCP} = 45^\circ$. Пусть длина экрана равна L . Тогда длина отрезка $EC = L\sqrt{5}$. Угол φ , равный углу NCK , найдём по теореме синусов: $\frac{L}{\sin\varphi} = \frac{L\sqrt{5}}{\sin 135^\circ}$, откуда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi = 18,4^\circ$. Следовательно, угловая длина дуги $\text{KNP} = 45^\circ + 18,4^\circ = 63,4^\circ$, а угол поворота α зеркала M будет в 2 раза меньше, то есть $\alpha = 31,7^\circ$. Искомое время движения зайчика по экрану найдём из пропорции $\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{360^\circ}$, откуда $t \approx 63$ с.

Система оценивания задачи:

Показано геометрически (построением), что луч может попадать на экран, отразившись от зеркала
СМ – 2 балла

Показано геометрически (построением), что луч может попадать на экран, отразившись сначала от зеркала CM, а потом от зеркала AD – **3 балла**

Найден угол KNP – 3 балла

Найдено искомое время – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов