

Ключи ответов

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

В исключительных случаях допускаются оценки, кратные 0,5 балла.

Максимальный балл за работу – 50.

Задача 1. Испытания.

При испытании квадрокоптеров была составлена такая программа патрулирования: два коптера одновременно вылетают из одной точки на базе, первый в течение 6 минут летит на север, а второй - на юг, затем коптеры разворачиваются, первый летит на юг, второй - на север, пока они не встречаются. Собственная скорость каждого коптера 10 км/ч. К сожалению, разработчики не учли наличие ветра, а коптеры не умеют корректировать курс с учётом ветра. Скорость ветра 1 км/ч. На каком расстоянии x от точки старта встретятся коптеры, если ветер дует с юга на север? Если ветер дует с запада на восток?

Решение

Введём обозначения: $\vec{u}$ – собственная скорость коптеров (относительно воздуха), $\vec{V}$ – скорость ветра.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимся воздухом. В этой системе оба коптера движутся в противоположные стороны со скоростями u в течение 6 минут, затем разворачиваются и движутся навстречу друг другу с теми же скоростями, очевидно, ещё в течение 6 минут. Полное время движения коптеров $t_{\text{п}} = 12$ минут. Точка старта в этой системе отсчёта движется со скоростью ветра V вне зависимости от его направления. Точка старта за всё время сместится на расстояние $x = V \cdot t_{\text{п}} = 1 \text{ км/ч} \cdot \frac{12}{60} \text{ ч} = 0,2 \text{ км}$. Таким образом $x_1 = x_2 = 0,2 \text{ км}$.

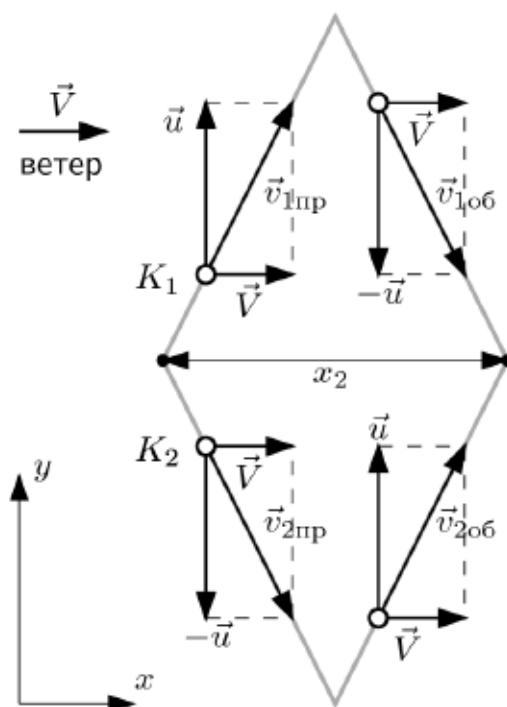
Возможное альтернативное решение.

Задачу можно решить, если использовать закон сложения скоростей, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$.

Рассмотрим случай, когда ветер дул с юга на север. Тогда в течение первых шести минут первый коптер будет лететь на север со скоростью $u + V = 11 \text{ км/ч}$, второй на — на юг со скоростью $u - V = 9 \text{ км/ч}$. Их перемещения будут соответственно равны $s_1 = 11 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 1,1 \text{ км}$, $s_2 = 9 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 0,9 \text{ км}$, а расстояние между коптерами к моменту разворота

будет равно $1,1 \text{ км} + 0,9 \text{ км} = 2 \text{ км}$. После этого первый коптер полетит на юг со скоростью 9 км/ч , второй — на север со скоростью 11 км/ч . Очевидно, разделяющие их 2 км они преодолеют также за 6 минут. До момента встречи первый коптер сместился на север на $1,1 \text{ км}$, а затем на юг на $9 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 0,9 \text{ км}$, оказавшись от точки старта на расстоянии $x_1 = 1,1 - 0,9 = 0,2 \text{ км} = 200 \text{ м}$.

Теперь рассмотрим случай, если ветер дует с запада на восток. Схема движения коптеров в этом случае приведена на рисунке. Вдоль оси x (направленной с запада на восток) коптеры будут двигаться со скоростью ветра $V = 1 \text{ км/ч}$, их x -координаты в каждый момент времени будут одинаковыми. Вдоль оси y они будут двигаться с собственными скоростями $u = 10 \text{ км/ч}$. За первые 6 минут каждый коптер сместится вдоль y на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{6}{60} \text{ ч} = 1 \text{ км}$, чтобы встретиться им нужно лететь обратно также в течение 6 минут, общее время движения 12 минут. За это время они пролетят на восток $x_2 = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{12}{60} \text{ ч} = 0,2 \text{ км} = 200 \text{ м}$.

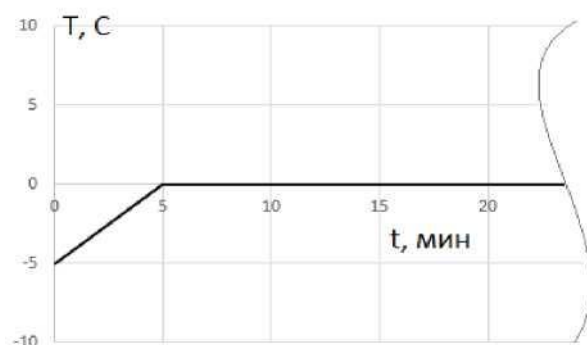


№	Критерий	Значение	Балл
	<i>При решении через относительность движения</i>		
1.1	Идея о переходе в движущуюся систему отсчёта		4
1.2	Утверждение о независимости расстояния между точками старта и встречи коптеров от направления собственных скоростей коптеров		3
1.3	Найдено расстояние между точками старта и встречи	$x = 0,2 \text{ км}$	3

	При решении через закон сложения скоростей		
2.1	Применён закон сложения скоростей	$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ или аналогичная	2
2.2	Использовано равенство времени движения до и после разворота • при ветре с юга на север • при ветре с запада на восток	6 минут в обоих случаях	2 2
2.3	Найдено расстояние от точки старта до точки встречи коптеров • при ветре с юга на север • при ветре с запада на восток	$x_1 = 0,2$ км $x_2 = 0,2$ км	2 2

Задача 2. Испорченный график.

Переливая воду из одного стакана в другой, ее разлили так, что пострадал график зависимости температуры замороженной в тонкостенном пластиковом стаканчике воды от времени. Помогите восстановить график: сколько длится прямая, параллельная оси времени? За какое время температура жидкой воды достигнет $+1^\circ\text{C}$? Теплоёмкость льда $2,7\text{ кДж/кг}\cdot^\circ\text{C}$ и воды $4,2\text{ кДж/кг}\cdot^\circ\text{C}$, удельная теплота кристаллизации воды $0,33\text{ МДж/кг}$.



Решение

В этом процессе мы имеем 3 стадии:

- 1) нагревание льда
- 2) плавление льда
- 3) нагревание жидкой воды

При нагревании льда видно, что наблюдается линейный рост температуры, что свидетельствует о постоянстве мощности нагрева на участке от -5 до 0°C . Значит, мощность нагрева жидкой фазы воды на участке от 0 до $+1^\circ\text{C}$ также будет постоянной и равно мощности нагрева льда, а также мощности, получаемой на участке плавления.

$$N_{\text{л}} = N_{\text{п}} = N_{\text{в}}$$

По определению мощность это теплота за единицу времени, поэтому

$$N_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{л}} m \Delta T_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} \text{ мощность нагрева льда;}$$

$$N_{\text{п}} = \frac{Q_{\text{п}}}{t_{\text{п}}} = \frac{\lambda m}{t_{\text{п}}} \text{ мощность плавления льда;}$$

$$N_{\text{в}} = \frac{Q_{\text{в}}}{t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{в}} m \Delta T_{\text{в}}}{t_{\text{в}}} \text{ мощность нагрева воды;}$$

Приравнивая, можем сократить массу, т.к. она постоянна.

$$\frac{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}}{t_{\text{л}}} = \frac{\lambda}{t_{\text{п}}} = \frac{c_{\text{в}} \Delta T_{\text{в}}}{t_{\text{в}}}$$

Прямая, параллельная оси времени определяется временем плавления льда, которое находим из:

$$t_{\text{п}} = \frac{\lambda}{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}} t_{\text{л}} = \frac{330}{2.7 \cdot 5} \cdot 5 \simeq 122 \text{ мин}$$

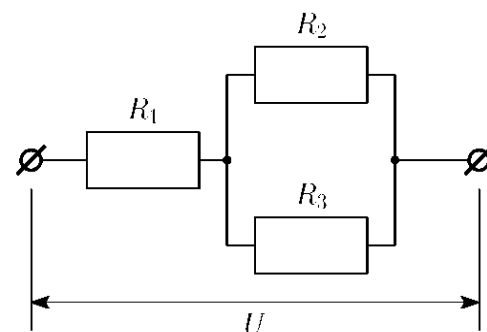
Далее следует нагревание жидкой воды, которое будет идти до температуры $+1^{\circ}\text{C}$:

$$t_{\text{в}} = \frac{c_{\text{в}} \Delta T_{\text{в}}}{c_{\text{л}} \Delta T_{\text{л}}} t_{\text{л}} = \frac{4.2 \cdot 1}{2.7 \cdot 5} \cdot 5 \simeq 1.5 \text{ мин}$$

№	Критерий	Значение	Балл
1	Догадка о равенстве мощностей	$N_{\text{л}} = N_{\text{п}} = N_{\text{в}}$	2
2	Использование закона постоянства массы		2
3	Нахождение времени плавления	122.0 - 122.5 мин 7320 - 7350 с	3
4	Нахождение времени нагревания воды	1.5 - 1.6 мин 90 - 95с	3

Задача 3. Неизвестные резисторы.

Рассчитайте сопротивления резисторов R_1 , R_2 и R_3 , если известно, что во всей цепи выделяется мощность $P = 4$ Вт при подаче на цепь напряжения $U = 4$ В, при этом на первом и втором резисторах выделяются мощности $P_1 = 1$ Вт и $P_2 = 2$ Вт, соответственно.



Решение. 1) Основной вариант.

Найдем полное сопротивление цепи

$$R_{\text{общ}} = \frac{U^2}{P} = \frac{4^2}{4} = 4 \text{ Ом.} \quad (1)$$

По закону Ома сила тока в цепи

$$I_{\text{общ}} = \frac{U}{R} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А.} \quad (2)$$

Находим сопротивление для первого резистора

$$R_1 = \frac{P_1}{I_{\text{общ}}^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ Ом.} \quad (3)$$

Суммарная мощность всех элементов не зависит от типа их соединения $P = P_1 + P_2 + P_3$.

Откуда

$$P_3 = P - P_1 - P_2 = 4 - 1 - 2 = 1 \text{ Вт.} \quad (4)$$

Напряжение U_2 , подаваемое на параллельное соединение

$$U_2 = U - U_1 = U - I_{\text{общ}} R_1 = 4 - 1 \cdot 1 = 3 \text{ В,} \quad (5)$$

где U_1 – напряжение на резисторе R_1 .

Получаем оставшиеся значения сопротивлений для резисторов

$$R_2 = \frac{U_2^2}{P_2} = \frac{3^2}{2} = 4,5 \text{ Ом} \quad \text{и} \quad R_3 = \frac{U_2^2}{P_3} = \frac{3^2}{1} = 9 \text{ Ом.} \quad (6)$$

2) Альтернативный вариант.

Запишем общее сопротивление цепи, которое складывается из последовательного и параллельного соединений

$$R_{\text{общ}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (7)$$

Так как соединение в общей цепи последовательное, то сила тока на первом резисторе

и на параллельном включении одинакова

$$P_1 = I_{\text{общ}}^2 R_1 = \frac{U^2}{R_{\text{общ}}^2} \cdot R_1 = P \frac{R_1}{R_{\text{общ}}} = U^2 \frac{R_1}{P^2}, \quad (8)$$

где была использована формула для мощности $P = \frac{U^2}{R_{\text{общ}}}$.

Сопротивление первого резистора

$$R_1 = U^2 \frac{P_1}{P^2}. \quad (9)$$

Суммарная мощность всех элементов не зависит от типа их соединения $P = P_1 + P_2 + P_3$. Используя формулы для мощностей, выразим R_3 через R_2 , учтем параллельность резисторов 2 и 3

$$R_3 = \frac{P_2}{P - P_1 - P_2} R_2. \quad (10)$$

Подставим (10) в формулу (7)

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 \frac{P_2}{P - P_1} = \frac{U^2}{P}. \quad (11)$$

Откуда

$$R_2 = U^2 \frac{(P - P_1)^2}{P^2 P_2}. \quad (12)$$

Подставляем (12) в (10)

$$R_3 = U^2 \frac{(P - P_1)^2}{P^2 P_3}. \quad (13)$$

Подставляем числовые значения

$$R_1 = 1 \text{ Ом}, \quad R_2 = 4,5 \text{ Ом}, \quad R_3 = 9 \text{ Ом}. \quad (14)$$

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записана какая-либо из формул для мощности.	$P = U^2/R = I^2R = UI$.	1
2	Найдено общее сопротивление цепи.	Выписана формула (1) и/или числовое значение $R_{\text{общ}} = 4 \text{ Ом}$.	1
3	Найдено сопротивление первого резистора.	Получена формула (9) и/или числовое значение $R_1 = 1 \text{ Ом}$.	2
4	Использована формула для суммарной мощности и/или найдена мощность P_3 .	Использовано $P = P_1 + P_2 + P_3$, и/или получено числовое значение $P_3 = 1 \text{ Вт}$.	2
5	Найдено сопротивление второго резистора.	Получена левая формула (6) для R_2 и/или найдено численное значение $R_2 = 4,5 \text{ Ом}$.	2
6	Найдено сопротивление третьего резистора.	Получена правая формула (6) для R_3 и/или найдено численное значение $R_3 = 9 \text{ Ом}$.	2

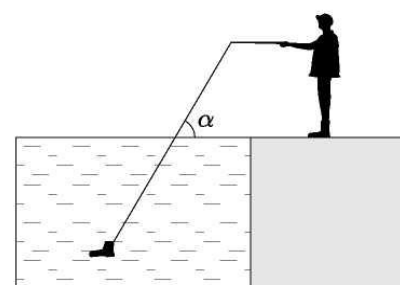
Задача 4. Рыбалка в пруду.

Рыбак ловил рыбу в пруду, как вдруг зацепился крючком за старый ботинок, лежащий на дне. Он стал вытаскивать ботинок, при этом сохраняя угол между леской и горизонтом постоянным и равным 60° , для чего рыбаку пришлось идти вдоль берега. Масса ботинка 170 г, он занимает объём 100 см^3 , сила натяжения лески постоянна и равна 2 Н. В какой-то момент ботинок стал подниматься с постоянной скоростью v .

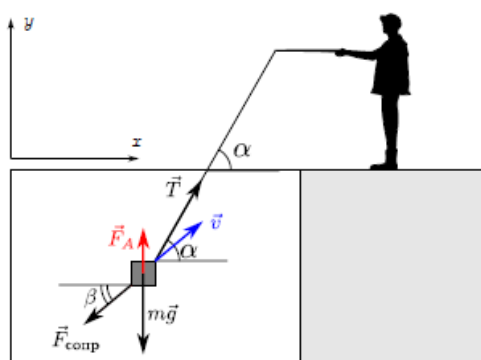
Определите:

- 1) скорость подъёма ботинка,
- 2) угол, под которым эта скорость направлена к горизонту,
- 3) скорость, с которой рыбак идёт по берегу.

Учтите, что на движущиеся в воде предметы действует сила сопротивления, направленная противоположно скорости и по величине равная $F_{\text{сопр}} = k \cdot v$, для данного ботинка $k = 1,79 \text{ кг/с}$. Плотность воды считать равной 1000 кг/м^3 , а ускорение свободного падения 10 м/с^2 .



Решение. Изобразим силы, действующие на ботинок: силу тяжести $m\vec{g}$, силу натяжения лески $\vec{T}$, выталкивающую силу $\vec{F}_A$ и силу сопротивления среды $\vec{F}_{\text{сопр}}$, которая направлена противоположно скорости ботинка $\vec{v}$ под углом β к горизонту (вообще говоря, отличным от угла α). Поскольку ботинок движется с постоянной скоростью, сумма этих сил должны быть равна нулю.



$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0. \quad (1)$$

Запишем уравнение (1) в проекциях на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned} Ox : \quad T \cos \alpha - kv \cos \beta &= 0, \\ Oy : \quad -mg + T \sin \alpha + F_A - kv \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Выполнив преобразования, получаем

$$\begin{cases} kv \cos \beta = T \cos \alpha, \\ kv \sin \beta = T \sin \alpha - mg + F_A = T \sin \alpha - mg + \rho g V. \end{cases} \quad (3)$$

Возведя в квадрат уравнения из системы (3) и сложив их, получим

$$\begin{aligned} (kv)^2 &= T^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + g^2 (\rho V - m) + 2T \sin \alpha g (\rho V - m) = \\ &= T^2 + g^2 (\rho V - m) + 2Tg (\rho V - m) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

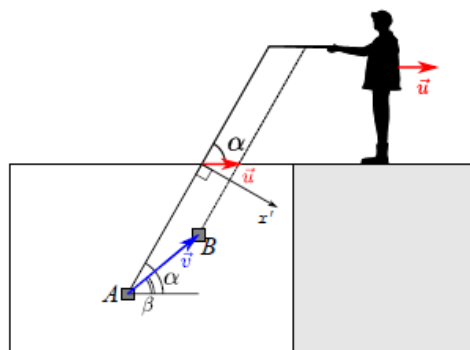
Отсюда найдём величину скорости ботинка:

$$v = \frac{\sqrt{T^2 + g^2 (\rho V - m) + 2Tg (\rho V - m) \sin \alpha}}{k} \approx 0,80 \text{ м/с}. \quad (5)$$

Если разделить уравнения в (3) друг на друга, найдём величину угла β :

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta &= \frac{T \sin \alpha - mg + \rho g V}{T \cos \alpha}, \\ \beta &= \text{arctg} \frac{T \sin \alpha - mg + \rho g V}{T \cos \alpha} \approx 46^\circ. \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения скорости рыбака $\vec{u}$ рассмотрим два различных положения ботинка, например, A и B . Рассмотрим перемещение точки пересечения лески с какой-либо горизонтальной прямой. Эта точка будет смещаться со скоростью рыбака $\vec{u}$. Введём ось Ox' , направленную перпендикулярно леске. Перемещения ботинка и рассматриваемой точки вдоль оси Ox' будут одинаковыми, следовательно, проекции скоростей ботинка и рыбака на эту ось равны:



$$u \sin \alpha = v \sin (\alpha - \beta) . \quad (7)$$

Отсюда:

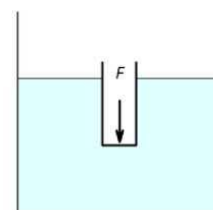
$$u = \frac{v \sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha} \approx 0,22 \text{ м/с}. \quad (8)$$

Критерии оценивания задачи №4.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Показано, что ботинок движется с постоянной скоростью, если все сумма всех сил равна нулю		1
2	Записано уравнение движения в проекциях на две оси	Уравнение (1) или аналогичное	2
3	Получено выражение для модуля скорости ботинка v	Формула (5).	1
4	Получено значение скорости ботинка v с точностью $\pm 0,01$ м/с	$v \approx 0,80$ м/с	1
5	Получено выражение для угла β	Формула (6) или аналогичная	1
6	Рассчитано значение угла β с точностью $\pm 2^\circ$	$\beta \approx 46^\circ$.	1
7	Корректно установлена связь скоростей ботинка и рыбака		2
8	Рассчитана скорость рыбака с точностью $\pm 0,02$ м/с	$u = 0,22$ м/с	1

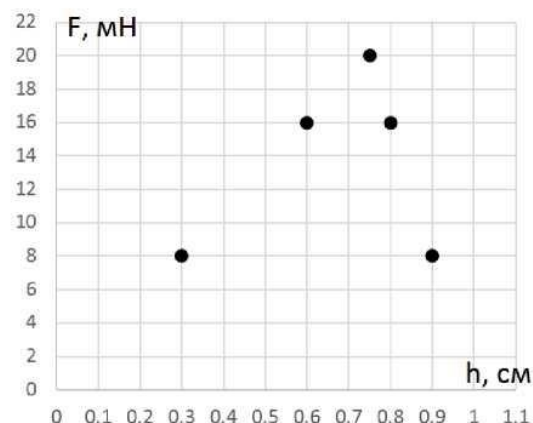
Задача 5. Потерянные данные.

В цилиндрическом стакане с водой плавает тонкостенный металлический напёрсток высотой 15 мм. Если топить напёрсток, измеряя динамометром зависимость силы F от перемещения h дна наперстка относительно стакана, то можно построить график (см график), но часть исходных данных стерлась с графика. Помогите восстановить данные:



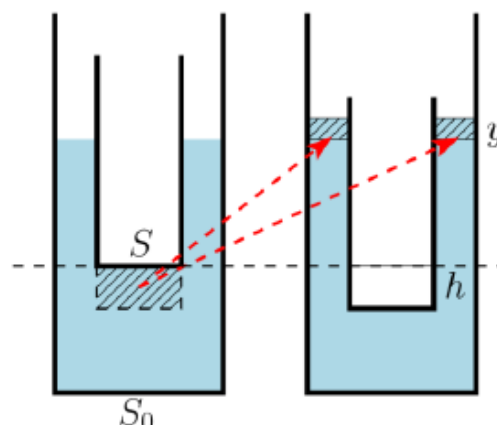
- 1) максимальную силу, приложенную к напёрстку
- 2) после какого перемещения напёрсток утонул
- 3) массу напёрстка
- 4) диаметр напёрстка
- 5) диаметр стакана

Плотность металла напёрстка считайте много больше плотности воды, равной 1 г/см^3 ,
 $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Решение

Рассмотрим процесс погружения напёрстка. Обозначим площадь дна напёрстка S , стакана — S_0 . Пусть напёрсток сместился к дну стакана на расстояние h , как показано на рисунке. Объём воды (цилиндр высотой h) вытесненный напёрстком, поднимет уровень воды на высоту y



$$Sh = (S_0 - S)y \Rightarrow y = \frac{S}{S_0 - S}h.$$

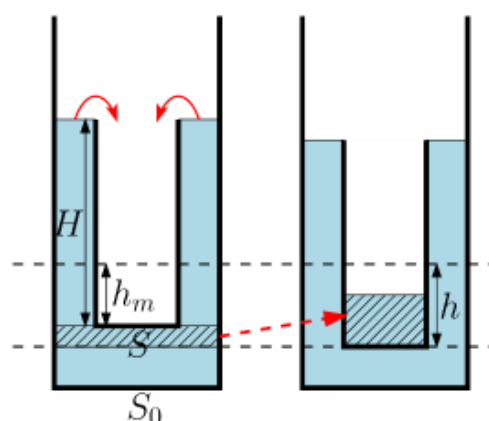
Это приведёт к увеличению выталкивающей силы, действующей на напёрсток, на величину.

$$\Delta F_A = \rho g S(h + y) = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S}h.$$

Силу ровно такой же величины нужно приложить к напёрстку, чтобы удерживать его в равновесии:

$$F_1(h) = \Delta F_A = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S}h. \quad (1)$$

Зависимость приложенной силы от перемещения напёрстка меняется, когда поверхность жидкости доходит до края напёрстка, после чего вода начинает выливаться в напёрсток. Пусть перемещение напёрстка, когда вода только дошла до его края, равно h_m . Напёрсток полностью погружен в воду, на него действует выталкивающая сила $F_{A1} = \rho g SH$, где $H = 15 \text{ мм}$ — высота напёрстка. Объём воды,

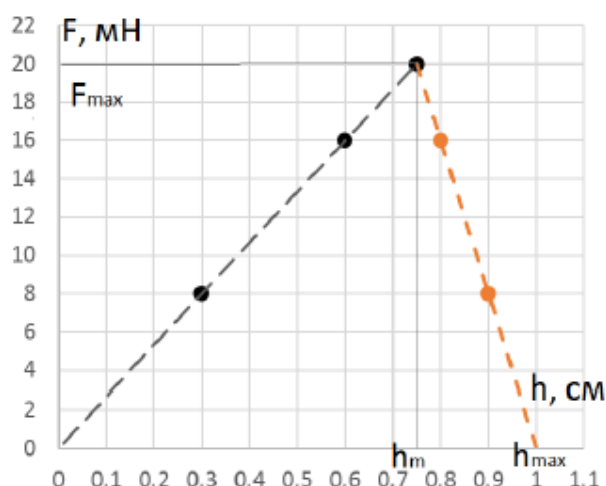


переливающейся в напёрсток при его смещении на h , равен $\Delta V = S_0(h - h_m)$. Тогда условие равновесия сместившегося напёрстка

$$F + mg + m_{ж}g = F + mg + \rho g S_0(h - h_m) = F_{A1} = \rho g SH,$$

$$F_2(h) = (\rho g(SH + S_0h_m) - mg) - \rho g S_0h. \quad (2)$$

Из (1) и (2) видно, что зависимости приложенной силы F от перемещения напёрстка h в обоих случаях линейные. Представленный график легко достроить до двух прямых линий. Из графика определяем $h_m = 0.75$ см, $F_{max} = 20$ мН, а также максимальное перемещение напёрстка $h_{max} = 1$ см, после которого напёрсток начинает тонуть.



Угловой коэффициент линейной функции для первого участка

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_1 = \rho g \frac{SS_0}{S_0 - S} = \frac{(16 - 8) \cdot 10^{-3} \text{ Н}}{(0,6 - 0,3) \cdot 10^{-2} \text{ м}} = \frac{8 \text{ Н}}{3 \text{ м}},$$

для второго участка

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2 = -\rho g S_0 = \frac{(8 - 16) \cdot 10^{-3} \text{ Н}}{(0,9 - 0,8) \cdot 10^{-2} \text{ м}} = -8 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Из последнего равенства легко определить площадь дна стакана S_0 :

$$S_0 = \frac{-\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2}{\rho g} = \frac{8 \text{ Н/м}}{1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \frac{\pi d_c^2}{4},$$

откуда находим диаметр дна стакана $d_c \approx 3.2$ см. Если поделить $\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_1$ на $-\left(\frac{\Delta F}{\Delta h}\right)_2$, получим

$$\frac{S_0}{S_0 - S} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{S_0}{4} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \frac{\pi d_n^2}{4}, \text{ откуда диаметр напёрстка } d_n \approx 1.6 \text{ см.}$$

Наконец, найдём массу напёрстка. Для этого можно воспользоваться известными из графика значениями h_m или h_{max} , что соответствует моменту утопания напёрстка, когда приложенная сила становится равной нулю.

$$F_2(h_{max}) = \rho g(SH + S_0 h_m) - mg - \rho g S_0 h_{max} = 0.$$

$$m = \rho(SH + S_0(h_m - h_{max})) = 0,001 \text{ кг} = 1 \text{ г}.$$

№	Критерий	Значение	Балл
1	Достроен 1 участок графика (положительный наклон). Достроен 2 участок графика (отрицательный наклон). <i>Если что-то требуемое найдено верно, но не из графических соображений, ставить все 2 балла</i>		1 1
2	Найдено перемещение затопления напёрстка	$h_{max} = 1\text{см}$	2
3	Определена F_{max}	$F_{max} = 20\text{мН}$	2
4	Определена масса напёрстка	1г	2
5	Определены диаметры стакана и напёрстка	$d_n \approx 1.6\text{см}$ $d_c \approx 3.2\text{см}$	1 1