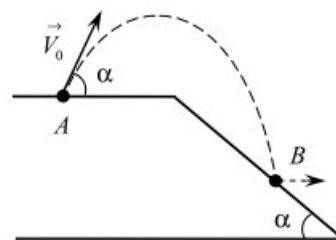


10 класс. Решения и критерии.

10-1. Мяч бросают из точки А под углом 30 градусов к горизонту. В точке В, лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под тем же углом. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости в горизонтальном направлении. Найдите начальную скорость мяча V_0 . Точка В лежит на высоте $h = 3,1$ м ниже точки А; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Решение

Пусть $\vec{V}$ — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена горизонтально, из простых геометрических соображений получаем, что вектор $\vec{V}$ образует с горизонтом угол $\beta = 2\alpha = 60^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки А в точку В. Тогда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{V}_0$ равен $\alpha + \beta = 3\alpha = 90^\circ$. Таким образом, векторы $\vec{V}$, $\vec{V}_0$ и $\vec{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α , лежащим против стороны $\vec{V}_0$. Отсюда находим связь V и V_0 :

$$V = V_0 \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} V_0$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m , имеем:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V^2 = V_0^2 + 2gh$$

Подставляя сюда $V = \sqrt{3} V_0$, находим начальную скорость мяча:

$$3V_0^2 = V_0^2 + 2gh \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{gh} = 5,6 \text{ м/с}$$

Ответ: 5,6 м.

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Сказано, что мяч отражается от плоскости при ударе зеркально, тк удар АУ	2
2	Записано выражение для вектора скорости	2
3	Правильно найдены углы. Найдена связь между V и V_0	2
4	Применен закон сохранения энергии	2
5	Получен и записан ответ	2
	ИТОГО:	10

10-2. С края полусферы массой $M=25$ кг, стоящей на шероховатом горизонтальном столе, начинает соскальзывать маленький брусок массой $m=40$ г. Найдите минимальное значение коэффициента трения между полусферой и столом, при котором полусфера будет оставаться неподвижной при движении бруска. Трением между бруском и полусферой не учитывайте; для упрощения считайте силу нормальной реакции, действующую на полусферу со стороны стола, постоянной и равной Mg .

Решение

Рассмотрим движение бруска по неподвижной полусфере. Пусть брусок прошёл по поверхности полусферы дугу, которой соответствует центральный угол α . Вторым закон Ньютона, записанный в проекции на направление центростремительного ускорения, даёт:

$$\frac{mV^2}{R} = N_1 - mg \sin \alpha$$

V — скорость бруска, R — радиус полусферы, N_1 — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. Скорость бруска найдём из закона сохранения энергии. Принимая потенциальную энергию за нуль в начальном положении бруска, получаем:

$$0 = \frac{mV^2}{2} - mgR \sin \alpha \quad \rightarrow \quad V^2 = 2gR \sin \alpha$$

Сила N_1 равна:

$$N_1 = mg \sin \alpha + \frac{mV^2}{R} = mg \sin \alpha + m \frac{2gR \sin \alpha}{R} = 3mg \sin \alpha$$

По третьему закону Ньютона сила N_1 равна силе давления бруска на полусферу. Горизонтальная составляющая силы давления компенсируется силой трения покоя F , действующей на полусферу со стороны стола:

$$F = N_1 \cos \alpha = 3mg \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3mg \sin 2\alpha}{2}$$

Вертикальная составляющая силы давления и сила тяжести Mg определяют силу нормальной реакции N_2 , действующую на полусферу со стороны стола:

$$N_2 = Mg + N_1 \sin \alpha = Mg + 3mg \sin^2 \alpha$$

В силу неравенства $M \gg m$ вторым слагаемым можно пренебречь. В этом приближении

$$N_2 = Mg$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \leq \mu N_2$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3mg \sin 2\alpha}{2} \leq \mu Mg \quad \rightarrow \quad \mu \geq \frac{3m \sin 2\alpha}{2M}$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось при любом значении угла α , достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $\sin 2\alpha = 1$. Тогда минимальное значение коэффициента трения, при котором полусфера будет оставаться неподвижной, равно:

$$\mu = \frac{3m}{2M} = 0,024$$

Ответ: 0,024

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записан второй закон Ньютона для бруска в неподвижной полусфере	2
2	Записан закон сохранения энергии	2
3	Найдены вертикальная и горизонтальная составляющие силы давления бруска на полусферу и силы реакции опоры	2
4	Записано ограничение на силу трения покоя для полусферы	2
5	Найдено минимальное значение коэффициента трения. Записан ответ	2
	ИТОГО:	10

10-3. Два одинаковых сосуда соединены короткой трубкой с краном. Сначала кран закрыт, в одном сосуде имеется $\nu_1 = 0,2$ моля гелия при давлении $P_1 = 0,7$ МПа, в другом – $\nu_2 = 0,3$ моля молекулярного азота N_2 при давлении $P_2 = 0,1$ МПа. Кран открывают, и газы начинают перемешиваться. В конечном состоянии оба сосуда заполнены однородной газовой смесью, находящейся в механическом и тепловом равновесии. Найдите давление P этой смеси. Стенки сосудов, трубка и кран не проводят тепло. Объем трубки не учитывайте.

Решение

Пусть T_1 и T_2 — начальные температуры гелия и азота, T — конечная температура газовой смеси. Рассмотрим баланс энергии для системы, состоящей из двух газов. Так как тепло к системе не подводится и газы не совершают механическую работу, то внутренняя энергия системы сохраняется:

$$\frac{3}{2} \nu_1 R T_1 + \frac{5}{2} \nu_2 R T_2 = \frac{3}{2} \nu_1 R T + \frac{5}{2} \nu_2 R T \quad \longrightarrow \quad 3 \nu_1 R T_1 + 5 \nu_2 R T_2 = (3 \nu_1 + 5 \nu_2) R T$$

Обозначим через V объем одного сосуда и запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в начальном состоянии и для конечной газовой смеси:

$$P_1 V = \nu_1 R T_1; \quad P_2 V = \nu_2 R T_2$$

$$P \cdot 2V = (\nu_1 + \nu_2) R T \quad \longrightarrow \quad R T = \frac{2 P V}{\nu_1 + \nu_2}$$

Подставляя эти результаты в уравнение баланса энергии, находим конечное давление газовой смеси:

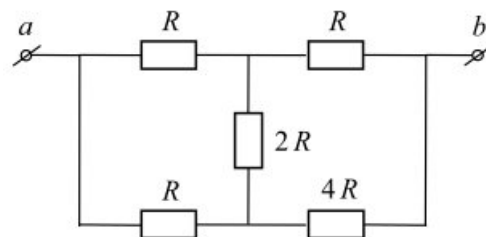
$$3 P_1 V + 5 P_2 V = \frac{(3 \nu_1 + 5 \nu_2) 2 P V}{\nu_1 + \nu_2} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{(3 P_1 + 5 P_2) (\nu_1 + \nu_2)}{2 (3 \nu_1 + 5 \nu_2)} = 0,31 \text{ МПа}.$$

Ответ: 0,31 Мпа.

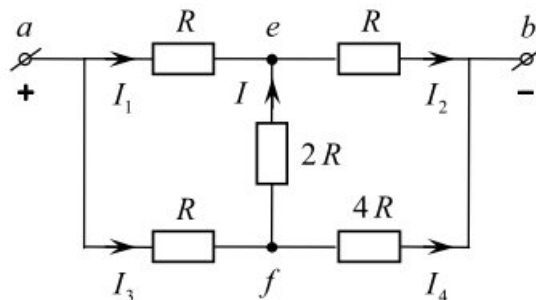
Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Сделан вывод о сохранении внутренней энергии системы	3
2	Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для начального состояния и конечного состояния газовой смеси.	3
3	Сделаны преобразования выражений	2
4	Получен и записан ответ	2
	ИТОГО:	10

10-4. Система, состоящая из трёх сопротивлений $R=100$ Ом, одного сопротивления $2R$ и одного сопротивления $4R$, подключена к источнику постоянного напряжения $V=22$ В за клеммы a и b . Найдите силу тока I , текущего через сопротивление $2R$.



Решение



Пусть положительный полюс батареи подключен к клемме a , а отрицательный к клемме b . Расставим токи в ветвях схемы и запишем закон сохранения заряда в узлах e и f :

$$I_2 = I_1 + I; \quad I_3 = I_4 + I$$

Приравняв нулю алгебраическую сумму напряжений в замкнутом контуре $ae fa$, получаем:

$$R I_1 - 2 R I - R I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 - 2 I - I_3 = 0$$

Кроме того, сумма напряжений на двух верхних и двух нижних сопротивлениях равна V . Имеем ещё два уравнения:

$$R I_1 + R I_2 = V \quad \rightarrow \quad I_1 + I_2 = \frac{V}{R}$$

$$R I_3 + 4 R I_4 = V \quad \rightarrow \quad I_3 + 4 I_4 = \frac{V}{R}$$

Получилась система пяти линейных уравнений для пяти неизвестных токов. Последовательно исключая неизвестные, находим ток I :

$$I = \frac{V}{11 R} = 20 \text{ мА}$$

Ответ: 20 мА.

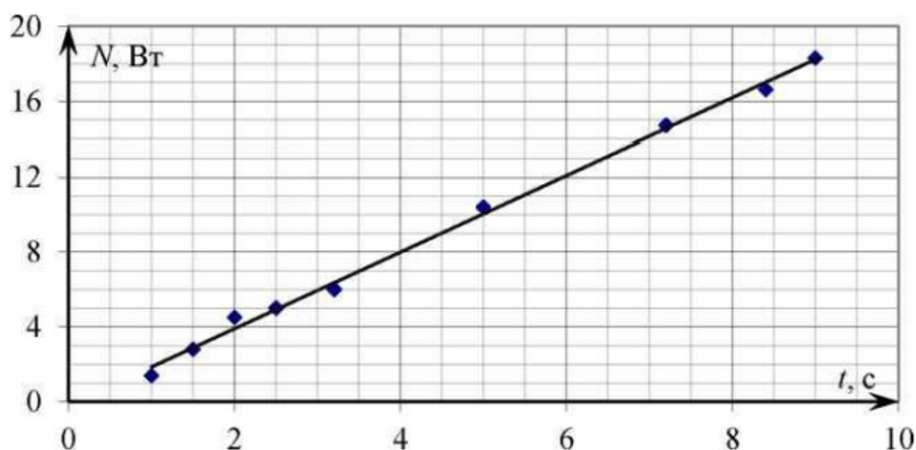
Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Расставлены токи в ветвях схемы, записаны соотношения для токов в узлах e и f	2
2	Записаны соотношения для напряжений в выбранном контуре.	2
3	Записаны соотношения для напряжений на двух верхних и двух нижних сопротивлениях.	2
4	Решена система получившихся уравнений	2
5	Получен и записан ответ	2
	ИТОГО:	10

10-5. В результате проведенного эксперимента получена зависимость мощности N постоянной горизонтальной силы от времени t ее действия на изначально покоящийся на гладком горизонтальном столе брусок массы $m = 2$ кг. Некоторые измерения могли оказаться не очень точными. Определите мощность силы в момент времени $\tau = 6$ с; найдите значение силы F .

$N, \text{Вт}$	1,4	2,8	4,5	5,0	6,0	10,4	14,7	16,6	18,3
$t, \text{с}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,2	5,0	7,2	8,4	9,0

Решение



По графику в момент времени $\tau = 6$ с мощность составляет 12 Вт.

Определим угловой коэффициент наклона графика $k = F^2 / m = 2 \text{ Вт/с}$

По угловому коэффициенту k , найдено значение силы $F = \sqrt{km} = 2 \text{ Н}$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Указано, что $N(t)$ -линейная зависимость	2
2	Построен график $N(t)$ по табличным данным.	3
3	Определена в момент времени $\tau = 6$ с мощность силы 12 Вт.	1
4	Определен угловой коэффициент наклона графика $k = 2 \text{ Вт/с}$	2
5	Определено значение силы $F = 2 \text{ Н}$	2
	ИТОГО:	10