

11.1. Установка, стоящая на краю вертикального обрыва, запускает в море маленький мячик со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной плоскости. Мячик упал в море под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонтальной плоскости. Определите высоту обрыва H над уровнем моря, расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения, скорость мяча v_k при падении, время t полета шарика. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Решение.

Векторный метод

Рассмотрим векторный треугольник скоростей, где вектор ускорения свободного падения направлен вертикально вниз.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Для радиус-вектора (начало отсчета свяжем с установкой):

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \text{ или } \frac{\vec{r}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Вектор $\vec{r}/t$ является медианой векторного треугольника скоростей, а его проекция на горизонтальное направление L/t – высотой треугольника. Углы треугольника равны $\alpha + \beta$, $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$.

Проекция скоростей на горизонтальную прямую (высоту треугольника):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Из теоремы синусов:

$$\frac{gt}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ - \beta)}. \quad (5)$$

Отсюда

$$t = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \frac{10 \text{ м/с}}{10 \text{ м/с}^2} \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.}$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{t} \cdot gt = \frac{1}{2} v_0 v_k \sin(\alpha + \beta). \quad (6)$$

Отсюда

$$L = \frac{v_0 v_k \sin(\alpha + \beta)}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 17,3 \text{ метров} \quad (7)$$

Примечание: школьник может заметить, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. векторный треугольник скоростей является прямоугольным, и решать этот частный случай.

№	Критерий	Баллы
1	Записаны формулы для векторного треугольника скоростей, или сделан рисунок треугольника	2
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3$ м/с.	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10$ м.	0,5
8	Записана теорема синусов	1
9	Получена формула для времени полета t	0,5
10	Получено числовое значение для времени полета $t \approx 2$ с.	0,5
11	Записаны формулы для площади векторного треугольника	1
12	Получена формула для расстояния L	0,5
13	Получено числовое значение для расстояния $L \approx 17,3$ м.	0,5
	Сумма	10

Координатный метод

При полете шарика его горизонтальная компонента скорости не меняется:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Рассмотрим время подъема шарика как время уменьшения вертикальной компоненты начальной скорости до 0:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (5)$$

а время падения – как время увеличения вертикальной компоненты от 0 до v_{ky} :

$$t_2 = \frac{v_{ky}}{g} = \frac{v_k \sin \beta}{g}. \quad (6)$$

Общее время полета:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{v_k \sin \beta}{g} = \frac{v_0}{g} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta \right) = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Подставим значения:

$$t = \frac{10 \text{ м/с} \cdot \sin 90^\circ}{10 \text{ м/с}^2 \cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.}$$

Расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения:

$$L = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 17,3 \text{ м.} \quad (8)$$

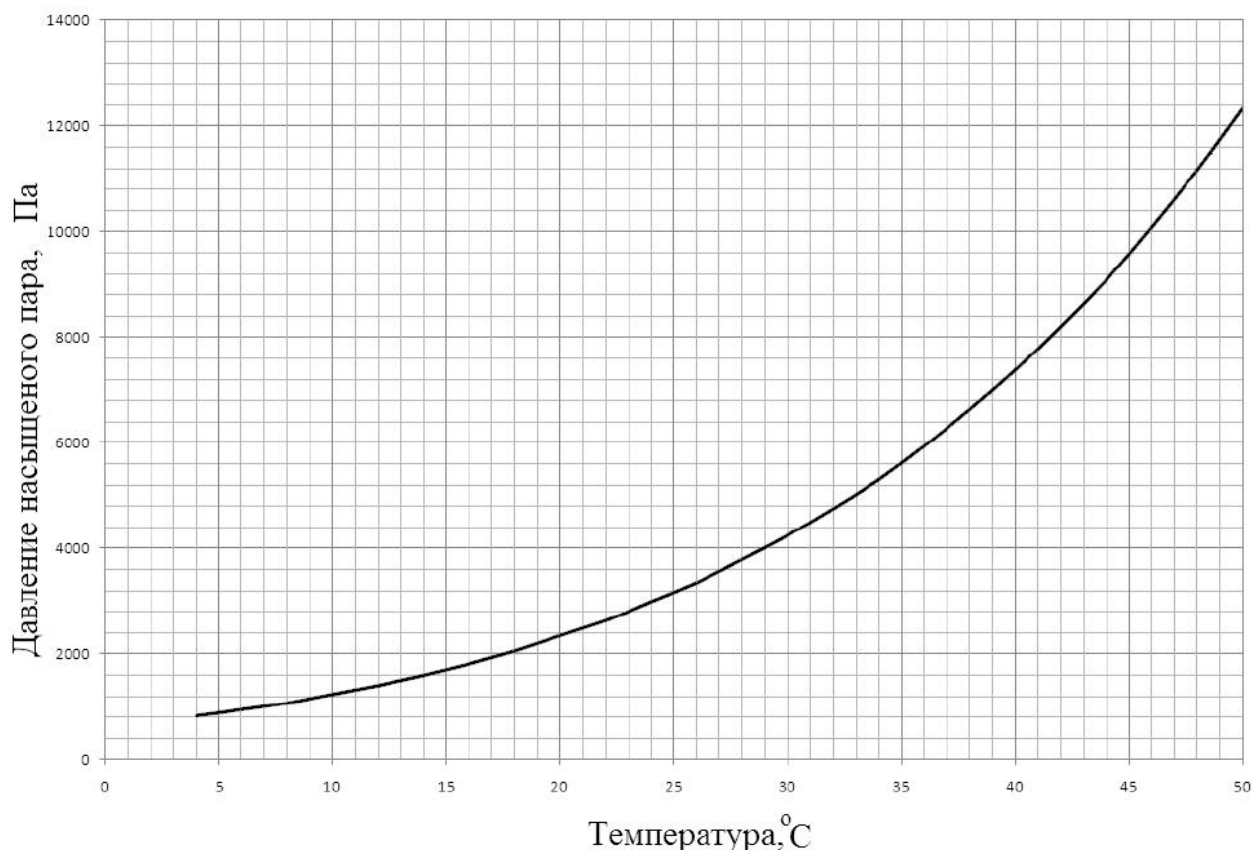
Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Есть идея решения, схема движения шарика	1
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3 \text{ м/с.}$	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10 \text{ м.}$	0,5
8	Найдено время подъема шарика	1
9	Найдено время падения шарика	1
10	Получена формула для времени полета t	0,5
11	Получено числовое значение для времени полета $t \approx 2 \text{ с.}$	0,5
12	Записаны формулы для равномерного движения по горизонтали	1
13	Получена формула для расстояния L	0,5
14	Получено числовое значение для расстояния $L \approx 17,3 \text{ м.}$	0,5
	Сумма	10

11.2. В процессе дыхания человека воздух, находящийся в альвеолах легких, из-за испарения воды достигает 100% влажности. Однако измерения относительной влажности выдыхаемого теплого воздуха показывают лишь 80% из-за наличия трахеи и бронхов, в которых испарение воды практически не происходит.

А) Оцените общий объем альвеол у человека (в литрах), если суммарный объем легких и дыхательных путей равен 5 литрам, а влажностью воздуха в дыхательных путях можно пренебречь.

Б) Оцените, сколько воды (в граммах) теряет здоровый человек (с температурой тела 36,6 °С) за сутки через выдыхаемый воздух, если в окружающей среде температура 20 °С и относительная влажность 50%? Принять, что в покое за 1 минуту легкие человека вентилируют 6 л воздуха, который прогревается до температуры тела. Молярная масса воды 18 г/моль.



Решение.

А) При выходе 100% влажного воздуха из альвеол он смешивается с практически сухим воздухом дыхательных путей, вследствие чего снижается относительная влажность.

$$\varphi_2 V_{\text{общ}} = \varphi_1 V_A, \quad (1)$$

где $\varphi_1 = 100\%$ – относительная влажность воздуха в альвеолах, $\varphi_2 = 80\%$ – относительная влажность воздуха после смешивания с сухим воздухом, V_A – объем альвеол, $V_{\text{общ}}$ – общий объем дыхательных путей и альвеол.

$$V_A = V_{\text{общ}} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 4 \text{ л.} \quad (2)$$

Б) При температуре $T_0 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ К}$ и относительной влажности $\varphi_0 = 50\%$ окружающей среды давление паров воды во вдыхаемом воздухе будет равно $p_0 = 0,5 * 2400 \text{ Па} = 1200 \text{ Па}$.

Найдем массу воды в альвеолах при поступлении туда вдыхаемого воздуха. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$p_0 V = \frac{m_0}{\mu} R T_0; \quad (3)$$

$$m_0 = \frac{p_0 V \mu}{R T_0}. \quad (4)$$

Здесь V – объем вентилируемого за 1 минуту воздуха, который за минуту проходит через альвеолы (80% от всего объема, т.е. $V = 4,8 \text{ л.}$). Как вариант, можно рассматривать весь вентилируемый объем с относительной влажностью $\varphi_2 = 80\%$.

В конце вдоха температура воздуха повышается до $T_1 = 36,6\text{ }^{\circ}\text{C} = 309,6\text{ К}$, что при 100% влажности дает давление паров воды $p_1 = 6000\text{ Па}$.

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1. \quad (5)$$

Масса воды в альвеолах в конце вдоха:

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu}{R T_1}. \quad (6)$$

Таким образом, за 1 минуту испаряется масса воды:

$$m_1 - m_0 = \frac{p_1 V \mu}{R T_1} - \frac{p_0 V \mu}{R T_0} = \frac{V \mu}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_0}{T_0} \right) \approx 0,16\text{ г}. \quad (7)$$

За сутки испарится $0,16\text{ г} \cdot 60 \cdot 24 \approx 230\text{ г}$ воды.

Примечание: после нагрева вдыхаемого воздуха с $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ его относительная влажность будет $\varphi_0 = 0,5 \cdot 2400\text{ Па} / 6000\text{ Па} = 20\%$. Если учесть это при решении пункта А, получим:

$$V_{\text{общ}} = V_A + V_{\text{П}};$$

$$\varphi_2 V_{\text{общ}} = \varphi_1 V_A + \varphi_0 V_{\text{П}}.$$

Решая систему уравнений, получаем $V_A = 0,75 V_{\text{общ}} = 3,75\text{ л}$, что близко к 4 л.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для влажности в альвеолах и в выдыхаемом воздухе	1
2	Найден объем альвеол 4 л (допустим вариант 3,75 л)	1
3	По графику найдено парциальное давление паров воды 1200 Па во вдыхаемом воздухе (с учетом относительной влажности 50%).	1
4	Записано уравнение (3) для вдыхаемого воздуха.	1
5	Записано выражение (4) для массы воды m_0 для вдыхаемого воздуха в вентилируемом за 1 минуту (или другое время) объеме альвеол	1
6	По графику найдено парциальное давление паров воды 6000 Па для воздуха в альвеолах.	1
7	Записано уравнение (5) для воздуха в альвеолах.	1
8	Записано выражение (6) для массы воды m_1 для воздуха в конце вдоха в вентилируемом за 1 минуту (или другое время) объеме альвеол	1
9	Найдена масса воды, которая испаряется в альвеолах за 1 минуту	1
10	Найдена масса воды, которая испаряется в альвеолах за 1 сутки	1
	Сумма	10

Примечания по разбалловке:

- могут считать вентилируемый объем сразу за 1 сутки, тогда за п. 9 и 10 ставим вместе 2 балла.

- если не учесть испарение воды только в альвеолах, то ответ получается на 20% больше – 0,20 г/мин и 288 г/сутки. За такой ответ предлагается ставить за п. 9 и 10 по 0,5 балла.

11.3. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m = 10$ кг. Коэффициент трения покоя между бруском и поверхностью – $\mu_1 = 0,5$, коэффициент трения скольжения – $\mu_2 = 0,4$. На брусок в горизонтальном направлении действует сила $F = 120$ Н. Во сколько раз изменится сила трения, действующая на тело, если горизонтальную силу уменьшить в 6 раз? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение.

Найдем минимальную силу, которую надо приложить горизонтально к бруску, чтобы сдвинуть его с места:

$$F_{\min} = \mu_1 N = \mu_1 mg = 0,5 * 10 \text{ кг} * 10 \text{ м/с}^2 = 50 \text{ Н.} \quad (1)$$

Поскольку $F > F_{\min}$, то брусок будет скользить с некоторым ускорением, а сила трения скольжения будет равна

$$F_{\text{тр}(1)} = \mu_2 N = \mu_2 mg = 0,4 * 10 \text{ кг} * 10 \text{ м/с}^2 = 40 \text{ Н.} \quad (2)$$

После уменьшения силы, действующей на тело, в 6 раз, она станет равна

$$F_2 = F / 6 = 20 \text{ Н.} \quad (3)$$

Поскольку $F_2 < F_{\min}$, то брусок будет покоиться, а сила трения будет равна силе, действующей на тело (векторная сумма сил равна 0):

$$F_{\text{тр}(2)} = F_2 = 20 \text{ Н.} \quad (4)$$

Отсюда находим, что сила трения уменьшилась в 2 раза.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для минимальной силы $F_{\min}$, которую надо приложить горизонтально к бруску, чтобы сдвинуть его с места, и вычислено её значение.	2
2	Записано, что $F > F_{\min}$, и скольжение бруска по горизонтальной поверхности	1
3	Записано выражение (2) для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(1)}$	1
4	Вычислено значение 40 Н для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(1)}$	1
5	Найдена сила F_2 , действующая на брусок во втором случае.	1
6	Записано, что $F_2 < F_{\min}$, и что брусок будет покоиться.	1
7	Записано, что сила трения будет равна силе, действующей на тело (или что для покоящегося тела векторная сумма сил равна 0).	1
8	Вычислено значение 20 Н для силы трения скольжения $F_{\text{тр}(2)}$	1
9	Найдено, сила трения уменьшилась в 2 раза	1
	Сумма	10

11.4. Для отображения сигнала на экране осциллографа используется электронно-лучевая трубка, в которой тонкий пучок электронов отклоняется при его

прохождении через плоский конденсатор (пластины конденсатора перпендикулярны плоскости экрана, пучок входит в конденсатор посередине между пластинами). Пусть l_1 – длина пластин конденсатора, d – расстояние между пластинами, L – расстояние от середины пластин до экрана ($L \gg l_1$), $2H$ – размер экрана по горизонтали, v_0 – скорость электронов в пучке, m и e – масса и заряд электрона. Луч пробегает с постоянной скоростью по экрану по горизонтальной оси от левого края до правого края за время T ($T \gg L/v_0$). Определите функцию зависимости разности потенциалов между пластинами U от времени t для отображения такого сигнала.

Решение.

Пусть z – ось, параллельная пластинам конденсатора, x – ось, параллельная плоскости экрана и перпендикулярная пластинам конденсатора.

Запишем уравнение движения электронов вдоль осей:

$$z = v_0 t, \quad x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Ускорение можно найти из 2-го закона Ньютона:

$$a = \frac{eE_x}{m} = \frac{eU}{md}, \quad (2)$$

где E_x – напряженность электрического поля внутри конденсатора, U – установленная разность потенциалов.

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$x = \frac{eU}{2mv_0^2 d} z^2. \quad (3)$$

Т.е. траектория электронов между пластинами конденсатора представляет собой параболу. За время прохождения конденсатора смещение пучка составит

$$h_1 = \frac{eU}{2mv_0^2 d} l_1^2, \quad (4)$$

а тангенс угла отклонения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{mv_0^2 d} l_1. \quad (5)$$

Выйдя из пластин конденсатора, электроны продолжают движение по прямой линии. Пусть l_2 – расстояние от края пластин конденсатора до экрана. Смещение отметки на экране составит:

$$h = h_1 + l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{eU}{mv_0^2 d} l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) = \frac{eU l_1 L}{mv_0^2 d}. \quad (6)$$

Отсюда получаем выражение для напряжения U на конденсаторе, необходимое для смещения h отметки на экране:

$$U = \frac{mv_0^2 d}{e l_1 L} h. \quad (7)$$

Поскольку по условию задачи время движения луча по экрану T много больше времени полета электрона между пластинами конденсатора и далее к экрану, можно считать, что текущее напряжение U практически сразу отображается в виде смещения сигнала на экране.

За время T сигнал с постоянной скоростью проходит от координаты $-H$ до координаты H . Этому соответствует функция

$$h(t) = \frac{H}{T}t - H. \quad (8)$$

Подставляя в (7), получаем:

$$U(t) = \frac{mv_0^2 d}{el_1 L} h(t) = \frac{mv_0^2 d}{el_1 L} \cdot \left(\frac{H}{T}t - H \right). \quad (9)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) движения электронов внутри конденсатора	1
2	Найдено ускорение – уравнение (2)	1
3	Показано, что траектория электронов между пластинами конденсатора представляет собой параболу – уравнение (3)	1
4	Найдено смещение пучка электронов внутри конденсатора – уравнение (4)	1
5	Найден угол (или тангенс угла) отклонения – уравнение (5)	1
6	Получена связь между смещением отметки на экране и напряжением на конденсаторе – уравнения (6), (7)	2
7	Отмечено, что ввиду $T \ll L/v_0$ текущее напряжение U практически сразу отображается в виде смещения сигнала на экране (пренебрегаем задержкой времени на пролёт электронов)	1
8	Получено уравнение (8) для зависимости координаты отметки на экране от времени	1
9	Записана функция зависимости (9) для разности потенциалов между пластинами U от времени t	1
	Сумма	10

11.5. Точечный источник света помещен на расстоянии $a = 16$ см от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Фокусное расстояние линзы равно $F = 8$ см. Между источником и линзой перпендикулярно главной оптической оси вставлены 2 стеклянные плоскопараллельные пластины толщиной $d = 4$ см и показателем преломления $n = 2$ каждая. На какое расстояние сместится изображение источника, если одну из пластин перенести в фокусную плоскость с другой стороны линзы? Указание: используйте параксиальное приближение о малости углов.

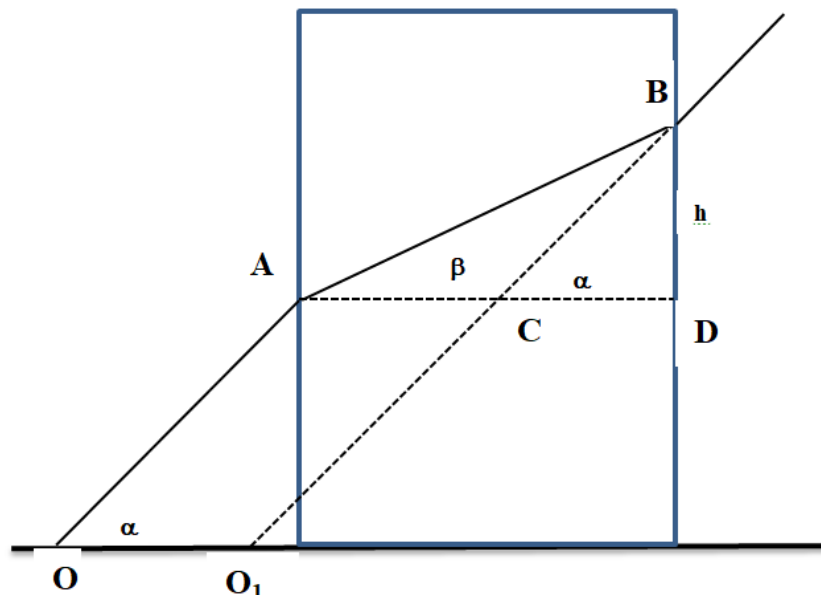
Решение.

Запишем формулу тонкой линзы для случая, когда нет пластин:

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

$$b_0 = \frac{a_0 F}{a_0 - F} = \frac{16 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{8 \text{ см}} = 16 \text{ см}. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь качественно прохождение через плоско-параллельную пластину луча света, выпущенного источником под углом α к главной оптической оси линзы (см. рисунок).



В точке А луч преломляется и идет под углом β к оси до точки В, в которой снова преломляется на границе с воздухом и идет дальше под углом α . Продолжение этого луча в обратную сторону дает пересечение в точке O_1 . Таким образом, вставка плоско-параллельной пластины равносильно смещению вправо источника света из точки O в точку O_1 (или смещению вправо изображения, если пластина с другой стороны линзы).

Найдем угол β из закона Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (3)$$

В параксиальном приближении (для малых углов):

$$\alpha = n \cdot \beta. \quad (4)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и CBD. Пусть $AC = x$, $BD = h$, $AD = d$ (толщине пластины). Тогда:

$$h = d \cdot \tan \beta \approx d \cdot \beta; \quad (5)$$

$$h = (d - x) \cdot \tan \alpha \approx (d - x) \cdot \alpha; \quad (6)$$

Приравниваем:

$$d \cdot \beta = (d - x) \cdot \alpha; \quad (7)$$

Воспользуемся выражением (4):

$$d = (d - x) \cdot n \quad (8)$$

$$\text{Отсюда } x = d \frac{n-1}{n} = d \frac{2-1}{2} = \frac{d}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, пластина толщиной d приводит к эффективному смещению источника (или изображения) вправо на расстояние $d/2$.

Для первого случая:

$$a_1 = a_0 - 2 \cdot \frac{d}{2} = 12 \text{ см.} \quad (10)$$

$$b_1 = \frac{a_1 F}{a_1 - F} = \frac{12 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{4 \text{ см}} \approx 24 \text{ см.} \quad (11)$$

Для второго случая:

$$a_2 = a_0 - \frac{d}{2} = 14 \text{ см.} \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{a_2 F}{a_2 - F} + \frac{d}{2} = \frac{14 \text{ см} \cdot 8 \text{ см}}{6 \text{ см}} + 2 \text{ см} \approx 20,7 \text{ см} \quad (13)$$

Изображение сместится влево на $b_1 - b_2 \approx 3,3$ см.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула тонкой линзы (1)	1
2	Найдено расстояние до изображения – формула (2), (10), (11)	1
3	Построен или качественно описан ход луча в плоско-параллельной пластине	1
4	Записан закон Снеллиуса	1
5	Найдено эквивалентное смещение источника (или изображения) x в параксиальном приближении – формула (9)	1
6	Найдено эффективное расстояние до источника a_1 в первом случае – формула (10)	1
7	Найдено расстояние b_1 до изображения во первом случае – формула (11)	1
8	Найдено эффективное расстояние до источника a_2 во втором случае – формула (12)	1
9	Найдено расстояние b_2 до изображения во втором случае – формула (13)	1
10	Найдено смещение изображения – влево на 3,3 см	1
	Сумма	10