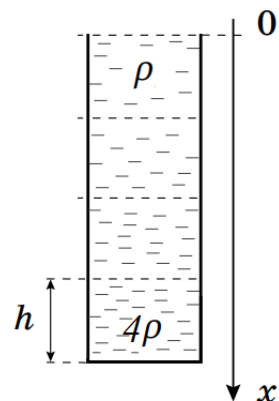


11.1. В невесомости?

В сосуд высотой $4h$ налита жидкость, плотность которой изменяется линейно с глубиной от ρ до 4ρ . Слои жидкостей не перемешиваются. Ускорение свободного падения g . В сосуд опускают маленькую каплю масла плотностью 2ρ , не смешивающегося с жидкостью в сосуде.



1. На какой глубине окажется капля в состоянии равновесия?
2. Какую форму будет иметь капля в состоянии равновесия?

Ответ обоснуйте.

Решение (Рубцов Д.)

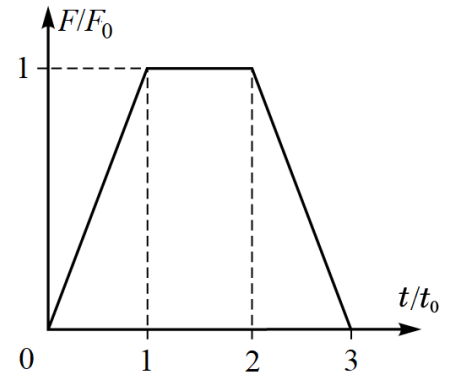
Плотность жидкости в зависимости от глубины $\rho(x) = \rho + \frac{3\rho}{4h}x$. Капля будет в равновесии, если окружающая ее жидкость будет иметь такую же плотность, как и сама капля, то есть $\rho(x_0) = \rho + \frac{3\rho}{4h}x_0 = 2\rho$. Искомая глубина $x_0 = \frac{4}{3}h$.

В состоянии равновесия силы тяжести и Архимеда компенсированы, капля находится в состоянии «невесомости». Единственные силы, влияющие на ее форму – это силы поверхностного натяжения. Энергия поверхностного слоя $W = \sigma S$. Капля стремится принять состояние минимума потенциальной энергии, то есть форму минимальной площади поверхности. При фиксированном объеме капли, минимальная площадь достигается для формы шара.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Условие плавания в каком-нибудь виде	1 балл
2	$\rho(x) = \rho + \frac{3\rho}{4h}x$	1 балл
3	$x_0 = \frac{4}{3}h$	2 балла
4	Утверждение, что форма капли зависит от энергии поверхностного слоя (в любом виде)	1 балл
5	$W = \sigma S$	1 балл
6	Утверждение, что капля стремится принять форму минимальной площади поверхности	2 балла
7	Ответ – шар (оценивается только при наличии корректного обоснования)	2 балла

11.2. В бассейне (Рубцов Д.). Пловец массой $m = 50$ кг отталкивается от бортиков бассейна. Сила давления от бортика изменяется так, как показано на рисунке (величины $F_0 = 1$ кН и $t_0 = 0,1$ с считайте известными). Определите:



- 3) скорость пловца v_0 сразу после толчка;
- 4) расстояние L от бортика, на котором остановится пловец, если после толчка не будет прилагать усилий.

Сила сопротивления, действующая со стороны воды на пловца, пропорциональна его скорости $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ ($k = 100 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$). Смещением пловца за время отталкивания можно пренебречь. Сила тяжести пловца компенсируется силой Архимеда. Движение пловца горизонтально.

Решение:

- 3) За малое время Δt импульс силы давления равен $F(t)\Delta t$. Геометрически это площадь маленького столбика под графиком $F(t)$. За всё время отталкивания импульс силы давления тогда равен полной площади под графиком $p_0 = 2F_0t_0$. Этот импульс идет на изменение импульса пловца mv_0 . Таким образом, $p_0 = 2F_0t_0 = mv_0$ и $v_0 = \frac{2F_0t_0}{m} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 4) Далее при движении на пловца действует только сила сопротивления $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, так как силы тяжести и Архимеда скомпенсированы. В проекции на горизонтальную ось второй закон Ньютона принимает вид $ma_x = -kv_x$. Домножим это уравнение на малое время Δt . Получим $ma_x\Delta t = -kv_x\Delta t$. Заметим, что $a_x\Delta t = \Delta v_x$ – это малое изменение проекции скорости, а $v_x\Delta t = \Delta x$ – небольшое изменение координаты пловца. Тогда $m\Delta v_x = -k\Delta x$. Суммируя это выражение от момента достижения максимальной скорости после толчка до полной остановки пловца, получаем $m(0 - v_0) = -kL$, то есть $L = \frac{mv_0}{k} = \frac{p_0}{k} = \frac{2F_0t_0}{k} = 2$ м.

1	Доказательство, что импульс силы давления – это площадь под графиком	2 балла
2	Найден импульс силы давления $2F_0t_0$	1 балл
3	Есть формула импульса пловца mv_0	1 балл
4	Импульс силы идет на изменение импульса пловца (в формульном или любом другом виде)	1 балл
5	$v_0 = \frac{2F_0t_0}{m} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$	1 балл
6	2 закон Ньютона на горизонтальную проекцию $ma_x = -kv_x$	1 балл
7	Идея домножения на Δt и суммирования	2 балла
8	$L = \frac{mv_0}{k} = \frac{p_0}{k} = \frac{2F_0t_0}{k} = 2$ м	1 балл

11.3. Максимальный угол. Небольшая равномерно заряженная диэлектрическая пылинка, имеющая форму шара радиусом R , помещена внутрь плоского воздушного конденсатора, обкладки которого имеют поверхностные заряды $\pm\sigma$. Определите заряд пылинки q , если максимальный угол между векторами напряженности результирующего поля и нормальми обкладок равен $\alpha = 30^\circ$? Краевыми эффектами пренебречь.

Решение (по мотивам задачи из книги «Олимпиадные задачи по физике» М.И.Бакунова и С.Б.Бирагова)

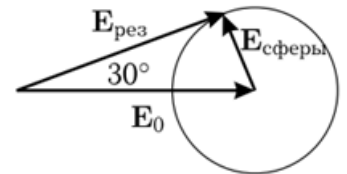
Поле конденсатора однородно, перпендикулярно обкладкам конденсаторов и равно $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Поле пылинки линейно растет внутри нее, а затем квадратично убывает вне ее.

Максимальное поле от пылинки достигается на ее поверхности и равно $E_{\text{пыл}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Результирующее поле - это векторная сумма напряженности поля конденсатора и пылинки $\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{пыл}}$.

Существование максимального угла, меньшего π , между вектором напряженности результирующего поля и вектором $\vec{E}_0$ означает, что в любой точке напряженность поля, создаваемого шаром, меньше $\vec{E}_0$.

При фиксированном значении заряда шара максимальный угол между вектором напряженности результирующего поля и вектором $\vec{E}_0$ достигается в тех точках, где напряженность поля шара максимальна (вблизи поверхности) и ориентирована так, что результирующее поле перпендикулярно полю сферы (см.рис., где окружность показывает возможные положения концов вектора поля сферы и вектора результирующего поля).

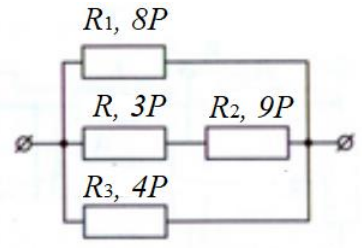


Из рисунка следует, что поле сферы должно быть направлено под углом 120° к полю $\vec{E}_0$ и равняться $E_0/2$. Так что $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ и $q = 2\pi\sigma R^2$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Поле конденсатора $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	1 балл
2	Поле на поверхности шара $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$	1 балл
3	Принцип суперпозиции $\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{сферы}}$	1 балл
4	Угол 30° достигается на поверхности шара	1 балл
5	Картинка достижения максимального угла (или аналогичное)	2 балла
6	$E_{\text{пыл}} = E_0/2$	2 балла
7	$q = 2\pi\sigma R^2$	2 балла

11.4. Разные мощности (Рубцов Д.). Считая известными соотношения между мощностями, выделяющимися на резисторах, а также одно из сопротивлений R , определите сопротивления остальных трех резисторов R_1, R_2, R_3 .



Решение:

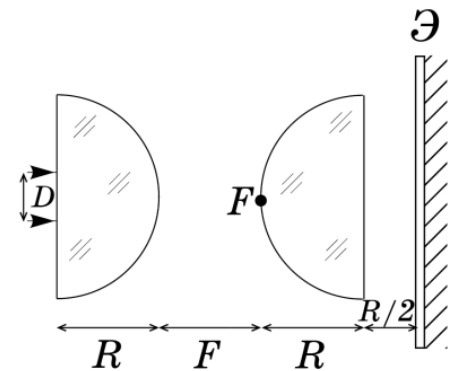
Через резисторы R и R_2 текут токи одинаковой силы I . Выделяющиеся на них мощности $3P = I^2 R$ и $9P = I^2 R_2$. Тогда $R_2 = 3R$. Суммарное сопротивление средней ветви $R + R_2 = 4R$.

На всех трех ветвях падает одинаковое напряжение U . Выделяющиеся мощности на каждой ветви $8P = \frac{U^2}{R_1}$, $12P = \frac{U^2}{4R}$ и $4P = \frac{U^2}{R_3}$. Откуда $R_1 = 6R$ и $R_3 = 12R$.

Критерии оценивания (10 баллов). Задачу можно решать различными способами. Приведем примерную схему оценивания

1	Продemonстрировано знание о том, что при последовательном соединении одинаковы силы тока, а при параллельном - напряжения	2 балла
2	Продemonстрированы знания формул мощности $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ (какие-нибудь, в зависимости от хода решения)	2 балла
3	$R_1 = 6R$	2 балла
4	$R_2 = 3R$	2 балла
5	$R_3 = 12R$	2 балла

11.5. Работают оба полушария. На стеклянное полушарие радиусом R попадает узкий пучок света диаметром $D \ll R$. После преломления в этом полушарии пучок света фокусируется в точке F . К этой точке приставляют другое такое же полушарие, а на расстоянии $R/2$ от второго полушария ставят экран. Показатель преломления стекла равен n . Пучок света и оба полушария соосны. Отражением пренебречь. Определите фокусное расстояние F и площадь светового пятна на экране. При каких показателях преломления стекла площадь светового пятна будет больше, чем исходная площадь пучка?

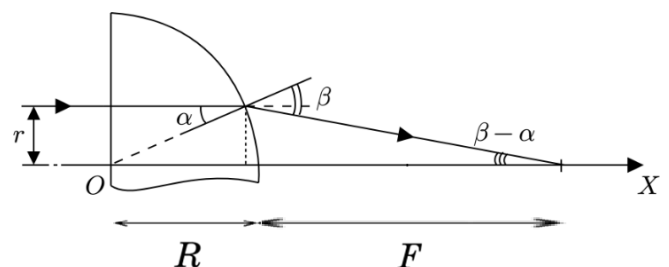


Решение (Рубцов Д.)

Рассмотрим луч, падающий на левое полушарие на расстоянии r от оси симметрии системы. При входе в полушарие нормальный луч не преломляется.

При выходе из полушария угол его падения α : $\sin \alpha = \frac{r}{R}$. Угол преломления β находится из закона Снелла $n \sin \alpha = \sin \beta$.

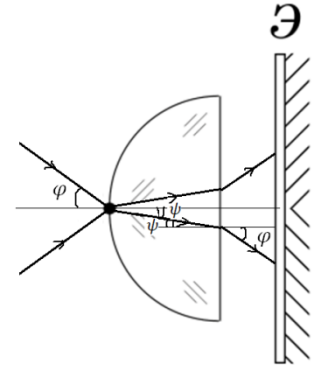
Угол наклона к оси симметрии системы преломленного луча равен $(\beta - \alpha)$. Его



также можно найти из геометрических соотношений $\tan(\beta - \alpha) \approx \frac{r}{F}$. Из предыдущих уравнений и из свойства малых углов $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ получаем $F = \frac{R}{n-1}$. Заметим, что ответ в приближениях задачи не зависит от r , то есть, действительно, весь пучок соберется в одной точке.

Максимальный угол падения на второе полушарие равен

$\varphi = (\beta - \alpha)_{\text{макс}} \approx (n - 1)\alpha_{\text{макс}} = \frac{(n-1)D}{2R}$. Тогда максимальный угол преломления ψ легко находится из закона Снелла $\sin \varphi = n \sin \psi$. С учетом малости углов $\psi \approx \frac{(n-1)D}{2Rn}$. При выходе из второго полушария угол падения будет ψ , а угол преломления, очевидно, ψ (как в плоскопараллельной пластине).



Таким образом, радиус светового пятна на экране равен $\rho = R \tan \psi + \frac{R}{2} \tan \varphi \approx R \left(\frac{(n-1)D}{2Rn} + \frac{(n-1)D}{4R} \right) = R \frac{(n-1)D}{2R} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)D(n+2)}{4n}$, а его площадь $S = \pi \rho^2 = \pi \left(\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} \right)^2$. Эта площадь больше, чем площадь исходного светового пучка $S_0 = \frac{\pi D^2}{4}$ при $\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} > \frac{D}{2}$, то есть при $n^2 - n - 2 > 0$ или $n \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Физический смысл имеет только ограничение $n > 2$. Материалы с таким показателем преломления есть, например, алмаз ☺.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Написано, что нормальные лучи не преломляются	0,5 балла
2	Закон Снелла при выходе из первого полушария $n \sin \alpha = \sin \beta$.	1 балл
3	Углы выражены через геометрические размеры $\sin \alpha = \frac{r}{R}$ и $\tan(\beta - \alpha) \approx \frac{r}{F}$	2 балла
4	Приближение малых углов $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$	0,5 балла
5	$F = \frac{R}{n-1}$	1 балл
6	Найдено, что угол раствора сходящегося пучка равен $\varphi = \frac{(n-1)D}{2R}$	1 балл
7	Законы Снелла для крайних лучей при входе и при выходе из второго полушария $\sin \varphi = n \sin \psi$	0,5 балла
8	Найдено вертикальное смещение крайних лучей во втором полушарии $R \tan \psi$	0,5 балла
9	Найдено дополнительное вертикальное смещение крайних лучей вне второго полушария $\frac{R}{2} \tan \varphi$	0,5 балла
10	Радиус светового пятна $\rho = \frac{(n-1)D(n+2)}{4n}$	0,5 балла
11	Площадь светового пятна $S = \pi \rho^2 = \pi \left(\frac{(n-1)D(n+2)}{4n} \right)^2$	1 балл
12	При $n > 2$ площадь светового пятна будет больше, чем исходная площадь пучка	1 балл