

1. «Сосуд с перегородкой»

Сосуд разделен нетеплопроводящей перегородкой на два отсека. В первом отсеке объемом V находится идеальный газ при температуре T под давлением p . Во втором отсеке объемом $2V$ находится такой же идеальный газ при температуре $4T$ под давлением $3p$. Какие температура и давление установятся в сосуде, если убрать перегородку? Потерями энергии в окружающее пространство пренебречь.

Возможное решение:

- 1) В начале в первом отсеке $pV = \nu_1 RT$, во втором $3p * 2V = \nu_2 R * 4T$. Отсюда $\nu_1 = \frac{pV}{RT}$; $\nu_2 = \frac{3}{2} \frac{pV}{RT}$
- 2) После того, как перегородку уберут, в сосуде установится тепловое равновесие. $p_k * 3V = (\nu_1 + \nu_2) RT_k$.
- 3) Внутренняя энергия системы по условию остаётся неизменной: $\frac{i}{2} (\nu_1 RT + \nu_2 R * 4T) = \frac{i}{2} (\nu_1 + \nu_2) RT_k$.
- 4) Из п. 3 имеем $T_k = \frac{14}{5} T$.
- 5) Из п.4 и п.2 имеем $p_k = \frac{7}{3} p$

Система оценивания задачи:

Выражено количество вещества в первом и втором отсеке – **2 балла**

Получено уравнение из п.2 – **2 балла**

Получено уравнение из п.3 – **2 балла**

Найдена конечная температура – **2 балла**

Найдено конечное давление – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Частица в магнитном поле»

В область однородного магнитного поля $B=0,1$ Тл влетает альфа-частица, скорость которой направлена под острым углом α к вектору магнитной индукции. Движение частицы представляет собой винтовую линию, радиус которой равен 30 см, а шаг этой винтовой линии равен 60 см. Определите угол α , скорость v . Какую ускоряющую разность потенциалов прошла альфа-частица перед тем, как попасть в магнитное поле? Масса альфа-частицы равна $6,68 * 10^{-27}$ кг, а заряд $3,2 * 10^{-19}$ Кл.

Возможное решение:

- 1) Движение вдоль линии м.п. будет равномерным и прямолинейным, а движение перпендикулярно линиям м.п. будет равномерным по окружности. Таким образом, скорость частицы можно представить в виде $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_\tau$, $\vec{v}_\tau$ – составляющая скорости вдоль м.поля, а $\vec{v}_n$ – перпендикулярно м.п. $\Rightarrow v_\tau = v \cos \alpha$, $v_n = v \sin \alpha$
- 2) Тогда $\frac{mv_n^2}{R} = qv_n B \Rightarrow R = \frac{mv_n}{qB}$, $T = \frac{2\pi m}{qB}$ – период вращения.
- 3) Шаг спирали $h = v \cos \alpha T = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\pi R}{h} = \pi \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{(1 + \pi^2)^{\frac{1}{2}}}$
- 4) $v = \frac{q h B}{2\pi m \frac{1}{(1 + \pi^2)^{\frac{1}{2}}}} = 1,5 * 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
- 5) $U = \frac{\frac{mv^2}{2}}{q} = \frac{q h^2 B^2 (1 + \pi^2)}{8\pi^2 m} = 2,4 * 10^4 \text{ В}$

Система оценивания задачи:

Показано, какое движение будет вдоль и перпендикулярно линиям м.п. – **1 балл**

Выражен период вращения из п.2 – **1 балл**

Выражен радиус спирали из п.2 – **1 балл**

Выражен шаг спирали – **1 балл**

Найдена тригонометрическая функция угла альфа – **2 балла**

Найдена скорость альфа-частицы – **2 балла**

Найдена ускоряющая разность потенциалов – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Корабль Знайки»

На своём космическом корабле Знайка движется вокруг Земли по орбите, близкой к круговой, со скоростью v . Поскольку корабль находится в верхних слоях атмосферы, на него действует сила трения прямо пропорциональная v^α . Найдите коэффициент альфа, если известно, что радиус орбиты корабля меняется незначительно и медленно, но с постоянной скоростью.

Возможное решение:

- 1) Механическая энергия корабля может быть рассчитана по формуле $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$.
- 2) Пусть на поверхности Земли ускорение свободного падения равно g , а радиус Земли равен R . Тогда для тела, вращающегося под действием силы тяготения на орбите с радиусом R можно второй закон Ньютона записать так: $mg = \frac{mv^2}{R}$, а по закону всемирного тяготения имеем $mg = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM$.
- 3) Если тело движется под действием силы тяготения на расстоянии r от Земли, то $\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{gR^2}{r} \Rightarrow E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = -\frac{mGM}{2r}$ (1)
- 4) $\Delta E = E(r + \Delta r) - E(r) = -\frac{mGM}{2(r + \Delta r)} + \frac{mGM}{2r} = \frac{mGM}{2r} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right) = \frac{mGM}{2r} * \left(1 - \frac{1 - \frac{\Delta r}{r}}{1 - \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2} \right) \approx -E(r) * \frac{\Delta r}{r}$ (2)
- 5) Пусть $F = \beta v^\alpha$. Работу силы трения можно рассчитать $A = -\beta v^\alpha v \Delta t = -\beta \left(\frac{GM}{r} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \Delta t$ (3), где $v \Delta t$ – путь, пройденный кораблём за Δt .
- 6) По теореме об изменении механической энергии получим $\Delta E = A \Rightarrow \frac{mGM}{2r^2} \Delta r = \beta \left(\frac{GM}{r} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\beta \left(\frac{GM}{r} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\frac{mGM}{2r^2}} = const$
- 7) Следовательно, $r^{-\frac{\alpha+1}{2}+2} = const \Rightarrow \alpha = 3$.

Система оценивания задачи:

Выведена формула (1) – **1 балл**

Выведена формула (2) – **3 балла**

Выведена формула (3) – **3 балла**

Рассчитана $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ – **2 балла**

Рассчитан α – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

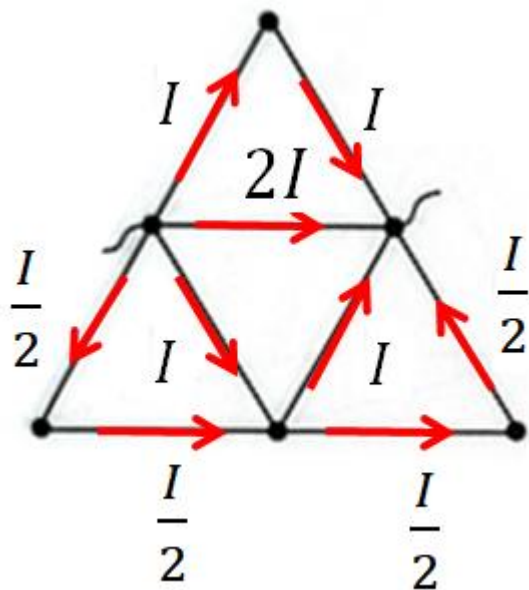
4. «Сетка»

Определите эквивалентное сопротивление проволочной сетки, изображённой на рисунке. Считайте сопротивление каждого ребра сетки равным R .



Возможное решение:

- 1) Рассмотрим эту сетку в удобном виде. Распределение токов в силу симметрии будет таким:



- 2) Тогда можно представить сетку как параллельное соединение сопротивлений $2R$, R , $2R$ и $4R$.

3)
$$R_0 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} \right)^{-1} = \frac{4}{9}R$$

Система оценивания задачи:

Показано распределение токов – **3 балла**

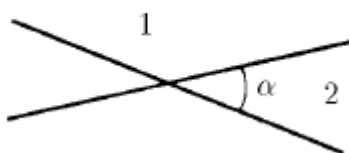
Показано, как соединены резисторы – **3 балла**

Рассчитано эквивалентное сопротивление сетки – **4 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

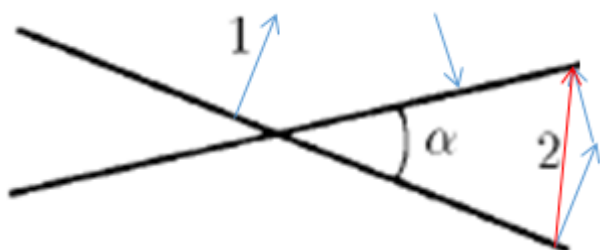
5. Две пересекающиеся под углом α бесконечные плоскости делят пространство на четыре области. Найдите:

А) Напряженность электрического поля в областях 1 и 2, если поверхностная плотность заряда плоскостей равна σ и $-\sigma$ соответственно.



Б) Где окажется частица зарядом q и массой m через время τ , находящаяся в начальный момент времени на биссектрисе угла α на расстоянии r от вершины угла, если она движется перпендикулярно биссектрисе со скоростью v . Всё время движения частица находится между пластин.

Возможное решение:



- 1) Поле пластины σ направлено перпендикулярно ей от пластины. Поле пластины $-\sigma$ направлено перпендикулярно ей к ней. Рассмотрим произвольную точку А, находящую в области 2. Напряжённость поля в ней по принципу суперпозиции равна сумме напряженности поля пластины σ и $-\sigma$. Тогда по теореме косинусов имеем (вектор E_2 обозначен красным):

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Аналогично для области 1 имеем

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- 2) Частица q будет находится в однородном электрическом поле в области 2. Двигаться она будет с постоянным ускорением, направленным вдоль E_2 . Причём E_2 направлено перпендикулярно биссектрисе угла альфа. Т.е. движение будет равнопеременным и прямолинейным. Тогда частица окажется на расстоянии $R = \sqrt{r^2 + \frac{a\tau^2}{2}} = \sqrt{r^2 + \frac{qE_2\tau^2}{2m}} =$

$$\sqrt{r^2 + \frac{q \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos(\frac{\alpha}{2}) \tau^2}{2m}}$$

Система оценивания задачи:

Найдено поле в области 1 – **2 балла**

Найдено поле в области 2 – **2 балла**

Найдено направление E_2 – **2 балла**

Определён характер движения частицы – **2 балла**

Найдено расстояние R – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов