

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ
(КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)
Максимальное количество баллов – 50 баллов

Задача №1. (Всего за задание – 10 баллов)

Дима и Аня стоят на противоположных краях оврага и бросают одновременно навстречу друг другу снежки. Край оврага, на котором стоит Дима, на $h = 3$ м выше, чем тот, на котором стоит Аня. Ширина оврага $a = 19$ м. Начальная скорость снежков одинакова. Дима бросает снежок под углом α_2 относительно горизонта. Под каким углом α_1 относительно горизонта должна бросить снежок Аня, чтобы снежки столкнулись в полете. Считать, что траектории полета снежков лежат в одной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение:

Кинематические уравнения, описывающие движение снежков относительно Ани:

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t \cos \alpha_1; \\ y_1 = v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{gt^2}{2}; \\ x_2 = a - v_0 t \cos \alpha_2; \\ y_2 = h + v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

где x_1, y_1, α_1 и x_2, y_2, α_2 – координаты и углы броска Ани и Димы соответственно. В точке столкновения, в некоторый момент времени t , координаты снежков совпадают:

$$\begin{cases} v_0 t \cos \alpha_1 = a - v_0 t \cos \alpha_2; \\ v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{gt^2}{2} = h + v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая неизвестный множитель $v_0 t$, получим уравнение:

$$a(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = h(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Используя тригонометрические формулы разности синусов и суммы косинусов, получим:

$$tg \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{h}{a}.$$

Откуда находим значение разности углов броска:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2 \arctan \left(\frac{h}{a} \right) \approx 18^\circ.$$

Для того, чтобы снежки столкнулись, Аня должна бросить снежок под углом к горизонту на 18° больше, чем угол броска Димы.

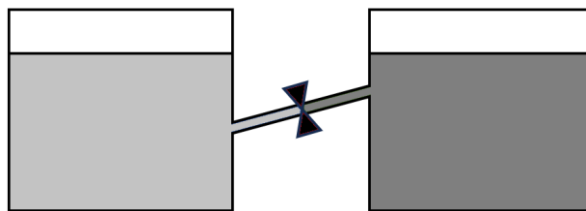
Примечание: возможно решение с использованием системы отсчета, движущейся с ускорением $\vec{g}$. В этой системе отсчета снежки движутся равномерно и прямолинейно и проходят одинаковое расстояние до столкновения. При этом условие $tg \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{h}{a}$ можно получить чисто геометрически.

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Записаны кинематические уравнения: $\begin{cases} x_1 = v_0 t \cos \alpha_1; \\ y_1 = v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{gt^2}{2}; \\ x_2 = a - v_0 t \cos \alpha_2; \\ y_2 = h + v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$	3
2	Указано, что в точке столкновения координаты снежков совпадают	2
3	Получена формула: $tg \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{h}{a}$	3
4	Рассчитано значение $\alpha_1 - \alpha_2 = 2 \arctan \left(\frac{h}{a} \right) \approx 18^\circ$	1
5	Сделан вывод	1

Задача № 2. (Всего за задание – 10 баллов)

Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой с краном. При закрытом кране в левый сосуд налили воду, а в правый – бензин такого же объема. Опишите и объясните процесс, происходящий после открытия крана.



Какой объем жидкости пройдет через кран? Площадь основания каждого сосуда равна $S = 6 \text{ дм}^2$. Отверстие трубки в сосуде с бензином изначально находится на глубине $h = 7 \text{ см}$. Плотность воды равна $\rho_v = 1,00 \text{ г/см}^3$, бензина $\rho_b = 0,75 \text{ г/см}^3$. Объемом трубки пренебречь.

Возможное решение:

При открытом кране жидкость, имеющая большее давление, будет выталкивать вторую жидкость. Поскольку плотность воды больше, чем бензина, и начальные уровни поверхностей жидкости одинаковы, то гидростатическое давление воды будет больше. Вследствие этого вода будет переливаться в сосуд с бензином и опускаться на дно. Это будет происходить до тех пор, пока гидростатические давления жидкостей не станут равны. При этом расстояние, на которое опустится уровень воды x , будет равно расстоянию, на которое поднимется уровень бензина, а объем прошедшей через кран воды будет равен $V = Sx$.

Рассмотрим конец трубки, из которого выливается вода. Равенство гидростатических давлений в нем определяется выражением:

$$\rho_{\text{в}} g(h - x) = \rho_{\text{б}} g(h + x).$$

Найдем x :

$$x = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{б}})}{(\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{б}})} h = \frac{(1 - 3/4)}{(1 + 3/4)} \cdot 7 \text{ см} = 1 \text{ см}.$$

Объем прошедшей через кран воды будет равен

$$V = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{б}})}{(\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{б}})} Sh = \frac{(1 - 3/4)}{(1 + 3/4)} \cdot 6 \text{ дм}^2 \cdot 7 \text{ см} = 0,6 \text{ л}.$$

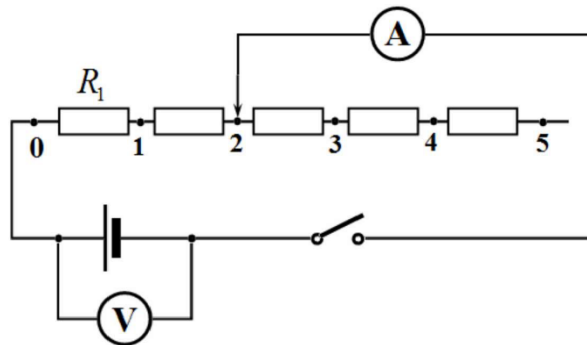
Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Указано и объяснено, что вода будет переливаться в сосуд с бензином.	1
2	Указано и объяснено, что вода будет опускаться на дно сосуда с бензином.	1
3	Указано, что движение жидкости в трубке прекратится, когда гидростатические давления жидкостей станут равны.	1
4	Указано, что расстояние, на которое опустится уровень воды, равно расстоянию, на которое поднимется уровень бензина.	1
5	Получено выражение для объема жидкости, прошедшей через кран: $V = Sh$.	1
6	Записано выражение для равенства гидростатических давлений в правом конце трубки: $\rho_{\text{в}} g(h - x) = \rho_{\text{б}} g(h + x)$.	2
7	Получено выражение для изменения уровня жидкостей: $x = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{б}})}{(\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{б}})} h$	1
8	Получено выражение для объема воды, прошедшей через кран: $V = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{б}})}{(\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{б}})} Sh.$	1
9	Рассчитано значение объема воды, прошедшей через кран: $V = 0,6 \text{ л}.$	1

Задача № 3 (10 баллов)

В лабораторной работе исследовалась электрическая схема, содержащая пять одинаковых резисторов с неизвестным сопротивлением R_1 , источник питания, амперметр, ключ. Подключая амперметр к различным точкам схемы, изменяли количество n включенных резисторов R_1 . Показания амперметра и вольтметра представлены в таблице:

n	I_n, A	U_n, B
0	0,9	4,85
1	0,5	7,69
2	0,4	8,39
3	0,3	9,06
4	0,2	8,72
5	0,2	9,93



Используя эти экспериментальные данные, определите сопротивление амперметра R_A и сопротивление резистора R_1 .

Возможное решение:

Запишем закон Ома для участка цепи в случае n включенных резисторов:

$$I_n = \frac{U_n}{R_A + nR_1}.$$

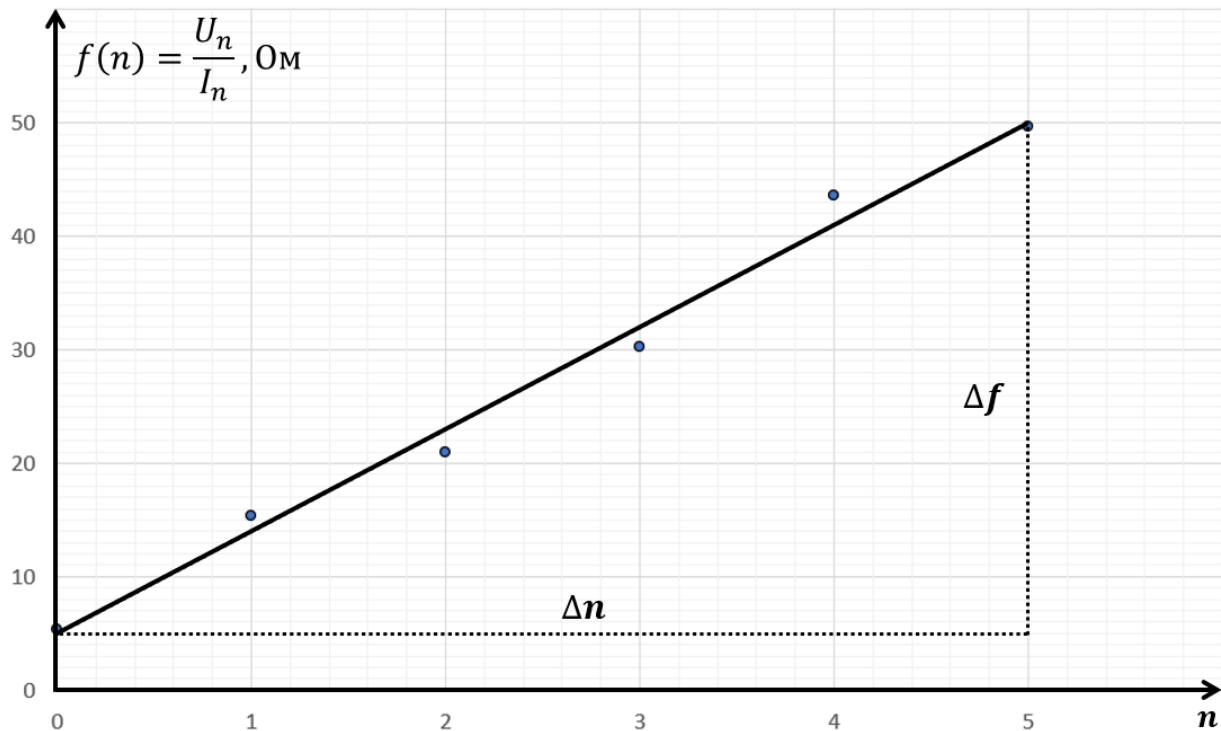
Для того чтобы использовать все данные таблицы и минимизировать погрешность определения величин R_A и R_1 , необходимо получить линейную функциональную зависимость $f(n) = an + b$, построить ее график и провести линейную аппроксимацию данных.

Заметим, что из закона Ома следует:

$$f(n) = \frac{U_n}{I_n} = nR_1 + R_A.$$

Из вида функции $f(n)$ следует, что коэффициент наклона аппроксимирующей прямой равен сопротивлению R_1 , а сдвиг по вертикальной оси равен R_A .

Построим график $f(n)$:



По графику найдем сопротивления:

$$R_1 = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{45}{5} = 9,0 \text{ Ом и } R_A = 5,0 \text{ Ом.}$$

Критерии оценивания:

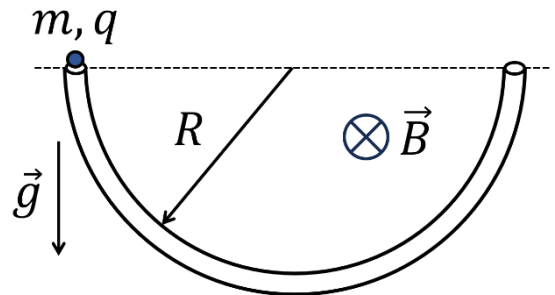
№	Критерий оценивания	Балл
1	Записан закон Ома для участка цепи: $I_n = \frac{U_n}{R_A + nR_1}$.	2
2	Найдена линейная зависимость: $f(n) = \frac{U_n}{I_n} = nR_1 + R_A$.	1
3	Построен график и проведена аппроксимирующая прямая	2
4	Рационально выбран масштаб графика	1
5	Подписаны оси графика	1
6	На осях графика нанесена шкала	1
7	Получено значение сопротивления амперметра: $R_A = (5,0 \pm 0,5) \text{ Ом}$.	1
8	Получено значение сопротивления резистора: $R_1 = (9,0 \pm 0,5) \text{ Ом}$	1

Задача №4 (10 баллов)

Трубка в виде полуокружности радиуса R помещена в однородное постоянное магнитное поле с магнитной индукцией $\vec{B}$. Внутри трубки аккуратно опускают шарик массы m , заряженный положительным зарядом q . Определите максимальную скорость v_{max} шарика и максимальную силу реакции опоры N_{max} , действующую на шарик в процессе движения. Известно, что выполняется равенство:

$$\frac{2R(qB)^2}{9m^2g} = 1.$$

Трением можно пренебречь. При движении шарика его заряд считать неизменным. Ускорение свободного падения равно $\vec{g}$.



Возможное решение:

В процессе движения на шарик действуют следующие силы:

1. Сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз.
2. Сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная радиально.
3. Сила Лоренца $q\vec{v}B$, направленная к центру окружности.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление:

$$qvB + N_{\text{ц}} - mgsin\alpha = ma_{\text{ц}} = m \frac{v^2}{R}.$$

Поскольку шарик движется без трения и работы силы реакции опоры и силы Лоренца равны нулю, то механическая энергия шарика при его движении сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgRsin\alpha.$$

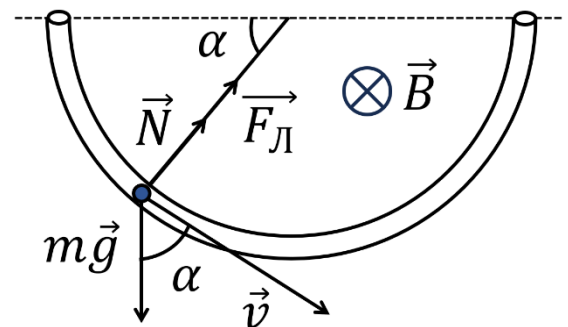
Максимальная скорость движения шарика достигается в нижней точке трубки.

Максимальная скорость шарика равна: $v_{max} = \sqrt{2gR}$.

С учетом закона сохранения энергии и второго закона Ньютона зависимость проекции силы реакции опоры от скорости имеет вид:

$$N_{\text{ц}} = \frac{3mv^2}{2R} - qvB.$$

Данная зависимость является квадратичной, ее графиком является парабола. Сила реакции опоры равна нулю при двух значениях скорости: при $v = 0$ и при $v = v_{max}$ (с учетом равенства из условия задачи $\frac{2R(qB)^2}{9m^2g} = 1$). При значениях скорости между нулем и v_{max} сила реакции опоры отрицательна. Минимум $N_{\text{ц}}$, а значит максимум N , достигается при $v = v_{max}/2$:



$$N_{max} = \left| \frac{3mv_{max}^2}{8R} - qv_{max}B/2 \right| = \left| \frac{3mg}{4} - \frac{3mg}{2} \right| = \frac{3mg}{4} = \frac{R(qB)^2}{6m}.$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Записано выражение для силы Лоренца: $F_L = qvB$ и верно определено ее направление.	1
2	Записан второй закон Ньютона: $F_L + N_{\text{ц}} - mgsin\alpha = ma_{\text{ц}}$.	1
3	Записано выражение для центростремительного ускорения: $a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}$.	1
4	Указано, что работы силы Лоренца и силы реакции опоры равны нулю	1
5	Записан закон сохранения энергии: $\frac{mv^2}{2} = mgRsin\alpha$.	1
6	Определена максимальная скорость шарика: $v_{max} = \sqrt{2gR}$.	1
7	Получена выражение для проекции $N_{\text{ц}} = \frac{3mv^2}{2R} - qvB$.	1
8	Обосновано, что максимальному значению силы реакции опоры соответствует вершина параболы (график $N(v)$).	2
9	Получено выражение для максимума: $N_{max} = \frac{3mg}{4} = \frac{R(qB)^2}{6m}$.	1

Задача №5 (10 баллов)

Муха летит со скоростью $v = 1$ м/с вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Оптическая сила линзы $D = 1,73$ дптр. Определите расстояние от линзы до действительного изображения мухи в момент времени, когда скорость движения изображения достигнет скорости света.

Возможное решение:

Формула тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} = D,$$

где d – расстояние от мухи до линзы; f – расстояние от линзы до изображения мухи; F – фокусное расстояние линзы. Действительное изображение получается, когда расстояние между предметом и линзой d больше фокусного расстояния F . По условию

скорость изображения мухи достигает скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Огромная скорость изображения по сравнению со скоростью мухи возможна только тогда, когда муха пролетает вблизи фокуса линзы $d \gtrsim F$.

Пусть расстояния от мухи до линзы d и от изображения до линзы f за небольшое время Δt изменяются на Δd и Δf соответственно. Тогда для положения мухи в момент времени $t + \Delta t$ формула тонкой линзы примет вид:

$$\frac{1}{d - \Delta d} + \frac{1}{f + \Delta f} = D.$$

Выразим Δd :

$$\frac{1}{d - \Delta d} - \frac{1}{d} = \frac{\Delta d}{(d - \Delta d)d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f + \Delta f} = \frac{\Delta f}{(f + \Delta f)f};$$

$$\Delta d = \frac{(d - \Delta d)d}{(f + \Delta f)f} \Delta f.$$

Рассмотрим малый промежуток времени, при котором перемещения мухи и изображения будут малы по сравнению с соответствующими расстояниями до линзы:

$$\Delta d \ll d \text{ и } \Delta f \ll f,$$

тогда

$$\Delta d = \frac{d^2}{f^2} \Delta f.$$

Разделив правую и левую части уравнения на Δt , получим

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d^2}{f^2} \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{F^2}{f^2} c.$$

Выразим расстояние от линзы до изображения:

$$f \approx F \sqrt{\frac{c}{v}} = \sqrt{\frac{c}{vD^2}} \approx 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}.$$

Примечание: точное решение получается при дифференцировании формулы тонкой линзы по времени:

$$f = F \left(\sqrt{\frac{c}{v}} + 1 \right) = \sqrt{\frac{c}{vD^2}} + \frac{1}{D} \approx 10000,6 \text{ м} \approx 10 \text{ км}.$$

Критерии оценивания:

№	Критерий оценивания	Балл
1	Записана формула тонкой собирающей линзы: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.	2
2	Записана формула для расчета фокусного расстояния линзы: $\frac{1}{F} = D$.	1
3	Получено выражение: $v \approx \frac{F^2}{f^2} c$ или аналогичное выражение.	5
4	Получена формула расстояния от линзы до изображения: $f \approx \sqrt{\frac{c}{vD^2}}$.	1
5	Рассчитано точное или приближенное значение: $f \approx 10$ км	1