

Ключи ответов

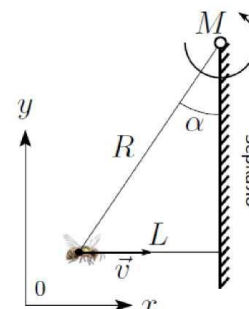
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

В исключительных случаях допускаются оценки, кратные 0,5 балла.

Максимальный балл за работу – 50.

Задача 1. Пчёлка и зеркало.

В прямоугольной системе координат XOY параллельно оси OX летит пчёлка с постоянной скоростью $V = 1$ м/с. Перед ней расположено зеркало, вращающееся вокруг неподвижной оси M с неизвестной угловой скоростью. Плоскость зеркала перпендикулярна плоскости XOY . В момент, когда зеркало оказалось параллельно оси OY , расстояние между пчёлкой и зеркалом равно $L = 0,5$ м, а расстояние между пчёлкой и осью вращения равно $R = 1$ м, при этом скорость изображения пчелы в зеркале с точки зрения самой пчелы направлена вдоль оси OY .



1) Определите, как в этот момент направлены скорости пчёлки и её изображения относительно зеркала.

2) Найти частоту вращения зеркала n (ответ выразите в оборотах в минуту и округлите до десятых).

Решение. Задачу можно решить с помощью построения.

Сделаем рисунок, обозначим на нём положения пчелы и её отражения (изображения), отметим размеры L и R . Обозначим скорости пчелы и её отражения в неподвижной системе отсчёта (СО) как $\vec{v}$ и $\vec{v}_{\text{отр}}$.

Скорость отражения относительно самой пчелы $\vec{v}'_{\text{отр}}$ по условию задачи направлена вертикально. Изобразим это на рисунке. Скорость отражения в неподвижной СО может быть найдена по закону сложения скоростей:

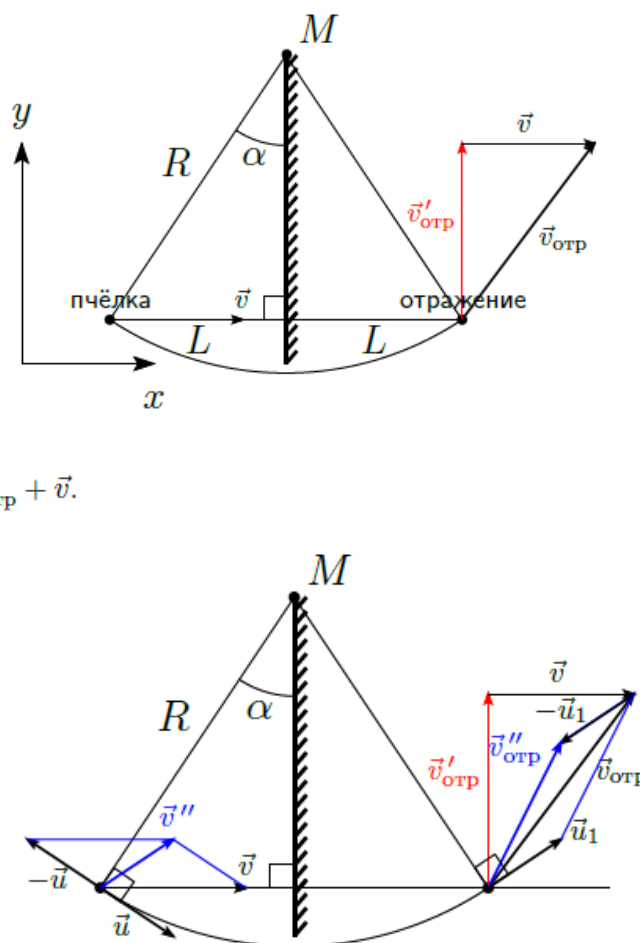
$$\vec{v}_{\text{отр}} = \vec{v}'_{\text{отр}} + \vec{v}.$$

Теперь перейдём в СО, вращающуюся вместе с зеркалом с её угловой скоростью ω . Скорости пчелы $\vec{v}''$ и её отражения $\vec{v}''_{\text{отр}}$ во вращающейся СО также могут быть найдены с помощью закона сложения скоростей

$$\vec{v}'' = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{v}''_{\text{отр}} = \vec{v}_{\text{отр}} - \vec{u}_1,$$

где $\vec{u}$ и $\vec{u}_1$ — вектора линейных скоростей вращения СО в точках положения пчелы и отражения соответственно. Длины этих векторов составляют ωR , а сами они направлены перпендикулярно радиус-векторам, проведённым от оси вращения к соответствующим точкам.



Во вращающейся СО, где зеркало покоится, вектора $\vec{v}''$ и $\vec{v}_{\text{отр}}''$ должны быть симметричны относительно зеркала (что не соблюдается на приведённом выше рисунке, на котором не учтено соотношение между v и u). Заметим, что это может иметь место только если вектора $\vec{v}''$ и $\vec{v}_{\text{отр}}''$ направлены вертикально. Действительно, горизонтальные компоненты векторов $\vec{v}''$ и $\vec{v}_{\text{отр}}''$ составляют

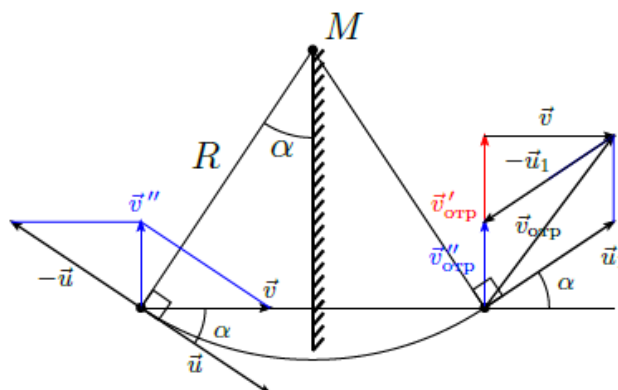
$$v_x'' = v - u_x = v - u \cos \alpha = v - \omega R \cos \alpha,$$

$$v_{\text{отр}x}'' = v - u_{1x} = v - \omega R \cos \alpha.$$

При этом в результате симметрии движения должно быть $v_x'' = -v_{\text{отр}x}''$, т.е. если $\vec{v}''$ и $\vec{v}_{\text{отр}}''$ направлены вертикально (вдоль оси Oy). Это условие может быть выполнено только, если $v_x'' = v_{\text{отр}x}'' = 0$. Таким образом,

$$v - \omega R \cos \alpha = 0 \Rightarrow v = \omega R \cos \alpha.$$

Корректная версия построения, с учётом симметрии скоростей $\vec{v}''$ и $\vec{v}_{\text{отр}}''$ приведена справа. Угловая скорость вращения зеркала:



$$\omega = \frac{v}{R \cos \alpha} = \frac{v}{R \cdot \frac{\sqrt{R^2 - L^2}}{R}} = \frac{v}{\sqrt{R^2 - L^2}}.$$

Наконец, частота вращения зеркала составляет

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi\sqrt{R^2 - L^2}} \approx 0,183 \text{ Гц} \approx 11,0 \text{ об./мин.}$$

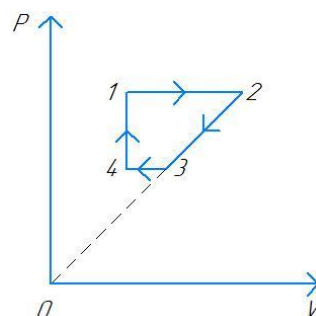
Замечание: задача может быть решена также и чисто аналитически, или графически с другой последовательностью переходов между СО, или путём поиска координат отражения как функции координат пчелы и угла поворота с последующим их дифференцированием по времени как производной сложной функции. Все решения, существенно отличающиеся от авторского, оцениваются в соответствии с инструкциями в пояснительной записке

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	В решении используется идея перехода в ИСО пчелки и/или вращающуюся систему отсчета, связанную с зеркалом.		1
2	Верно показана связь скоростей изображения в лабораторной СО и в СО пчёлки ($\vec{v}_{\text{отр}}$ и $\vec{v}'_{\text{отр}}$).	$\vec{v}_{\text{отр}} = \vec{v}'_{\text{отр}} + \vec{v}$ или рисунок с соответствующим треугольником скоростей.	1

3	Верно применено правило сложения скоростей при переходе во вращающуюся систему отсчёта для скоростей пчёлки и отражения (по 1 б. за каждую скорость).	$\vec{v}'' = \vec{v} - \vec{u}$, $\vec{v}_{\text{отр}}'' = \vec{v}_{\text{отр}} - \vec{u}_1$, или изображены соответствующие векторы и треугольники скоростей.	2
4	Связь линейной скорости вращения с угловой.	$u = u_1 = \omega R$	1
5	Идея симметрии относительно плоскости зеркала скоростей пчёлки $\vec{v}''$ и отражения $\vec{v}_{\text{отр}}''$ во вращающейся системе отсчёта		1
6	Показано, что скорости пчёлки $\vec{v}''$ и отражения $\vec{v}_{\text{отр}}''$ во вращающейся системе отсчёта направлены вдоль оси Oy (по 1 б. за каждую скорость).	Словесное описание, рисунок или запись $v_x'' = v_{\text{отр}x}'' = 0$.	2
7	Получена формула для угловой скорости зеркала ω или для частоты вращения зеркала n	$\omega = \frac{v}{\sqrt{R^2 - L^2}}$ или $n = \frac{v}{2\pi\sqrt{R^2 - L^2}}$.	1
8	Найдена величина частоты вращения зеркала n	$n \approx 11,0$ об./мин.	1

Задача 2. «Цикл»

Дан цикл 1-2-3-4. В процессе 1-2 газ совершил работу A , при этом его температура выросла в 9 раз. Точки 1 и 3 лежат на одной изотерме. Прямая 2-3 проходит через начало координат. Определите температуру в точке 1 и работу газа за цикл.



Возможное решение:

- Пусть температура в точке 1 и 3 равна T_1 , тогда в точке 2 температура равна $3T_1$. Пусть p_1 - давление в точке 1 и 2, а p_3 - давление в точке 3. V_1, V_2, V_3 - объёмы в точках 1,2,3 соответственно. Работа газа на участке 1-2 равна $A_{12} = A = p_1(V_2 - V_1)$.
- $p_1 V_1 = \nu R T_1$ и $p_1 V_2 = 9\nu R T_1 \Rightarrow A = 8\nu R T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{A}{8\nu R}$.
- Работа газа за цикл равна площади внутри цикла в осях pV :

$$A_{12341} = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)((V_2 - V_1) + (V_3 - V_1))$$
- $\frac{p_1}{V_2} = \frac{p_3}{V_3}, \frac{p_1 V_2}{3T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_1} \Rightarrow p_1 = 3p_3, 3V_3 = V_1$.
- $A_{12341} = \frac{1}{2} 2p_1 \left(V_2 - \frac{5}{3} V_1 \right) = p_1 \left(9V_1 - \frac{5}{3} V_1 \right) = \frac{22}{5} \nu R T_1 = \frac{11}{20} A$.

Система оценивания задачи:

Выражена работа на участке 1-2 – **1 балл**

Найдена температура в точке 1 – **3 балла**

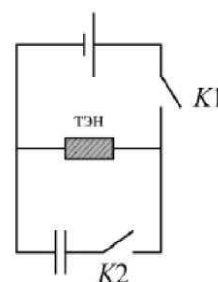
Написано соотношение для давлений и объёмов точек 2 и 3 – **1 балл**

Найдено соотношение между давлениями и объёмом в точках 1 и 3 – **2 балла**

Найдена работа за цикл – **3 балла**

Задача 3. Ёмкий тэн

Схема состоит из двух ключей, идеального источника ЭДС, конденсатора и тэна (нагревательного элемента) с сопротивлением $R = 2 \text{ Ом}$, который погружен в емкость с теплоизолированными стенками. Перед каждым экспериментом в емкость наливают одинаковое количество жидкости с температурой $T_0 = 20^\circ\text{C}$, конденсатор исходно разряжен. Сначала оба ключа разомкнуты. В первом эксперименте ключ $K1$ замкнули на $t_1 = 10$ секунд, температура жидкости после этого составила $T_1 = 40^\circ\text{C}$. Во втором эксперименте сначала замкнули $K2$, а затем вновь на $t_1 = 10$ секунд ключ $K1$. в этом случае жидкость нагрелась до $T_2 = 41^\circ\text{C}$. Определите емкость конденсатора. До какой температуры нагреется жидкость в третьем эксперименте, когда при замкнутом ключе $K2$ исследователи замкнут ключ $K1$ уже на $t_2 = 20$ секунд?



Решение

Рассмотрим первый эксперимент. Мы не знаем напряжение источника ЭДС (U), а также массу (m) и теплоемкость (c) налитой жидкости. Запишем уравнение теплового баланса и закон Джоуля — Ленца:

$$\frac{U^2 t_1}{R} = c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \quad (1)$$

Пользуясь тем фактом, что ЭДС источника, а также теплоёмкость жидкости и ее масса не меняются от эксперимента к эксперименту, выразим их через известные нам величины:

$$\frac{c \cdot m}{U^2} = \frac{t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)}$$

Во втором эксперименте, когда ключ $K2$ замкнут и параллельно тэну подключен конденсатор с неизвестной электроёмкостью C_k , на тэне после отключения ключом $K1$ источника ЭДС будет дополнительное тепловыделение от энергии, запасенной в конденсаторе. Запишем уравнение теплового баланса для этого случая:

$$\frac{U^2 t_1}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_0) = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) + c \cdot m \cdot (T_1 - T_0) \quad (2)$$

Если вычесть из уравнения (2) уравнение (1), то получится:

$$\frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

Определим емкость конденсатора из данного выражения:

$$C_k = \frac{2c \cdot m}{U^2} (T_2 - T_1) = \frac{2t_1}{R \cdot (T_1 - T_0)} (T_2 - T_1)$$

Подставим числа и получим:

$$C_k = \frac{20}{2 \cdot (40 - 20)} (41 - 40) = 0.5 \Phi$$

Вычислим итоговую температуру для третьего эксперимента, когда тэн с конденсатором были включены $t_2 = 20$ секунд. Запишем уравнение теплового баланса:

$$\frac{U^2 t_2}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T - T_0)$$

Откуда:

$$T = T_0 + \frac{U^2 \cdot t_2}{c \cdot m \cdot R} + \frac{C_k U^2}{2c \cdot m} = T_0 + \frac{t_2}{t_1} (T_1 - T_0) + T_2 - T_1$$

Подставим числа и получим:

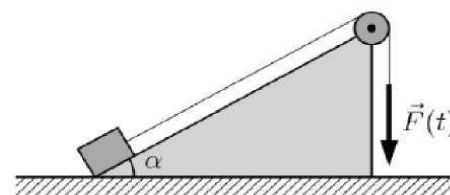
$$T = 20 + 20 \cdot 2 + 41 - 40 = 61^\circ \text{C}$$

Второй вариант решения для третьего эксперимента: нагрев длительностью $t_1 = 10$ секунд без конденсатора приводит к разнице температур в 20°C , а следовательно, при $t_2 = 20$ секунд разница температур составит 40°C . Энергия полностью заряженного конденсатора приводит к дополнительной разнице температур в 1°C и одинакова, как для t_1 , так и для t_2 . Просуммировав, получим разницу температур в 41°C , а следовательно температура жидкости будет 61°C .

№	Критерий	Значение	Балл
1	Записано уравнение теплового баланса для первого эксперимента	$\frac{U^2 t_1}{R} = c \cdot m \cdot (T_1 - T_0)$	3
2	Записано уравнение теплового баланса для второго эксперимента	$\frac{U^2 t_1}{R} + \frac{C_k U^2}{2} = c \cdot m \cdot (T_2 - T_0)$ или аналогичное	3
3	Вычислено значение емкости конденсатора	$C_k = 0.5 \Phi$	2
4	Вычислено значение температуры в третьем эксперименте	$T = 61^\circ \text{C}$	2

Задача 4. Подъёмник

В рамках разработки нового двигателя для грузового подъёмника провели следующий эксперимент. Некоторый груз поднимали по наклонной плоскости, закреплённой под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, как показано на рисунке. Модуль силы F , с которой понимали груз, зависел от времени по закону $F(t) = \kappa t$, где коэффициент $\kappa = 10$ Н/с. В таблице приведена измеренная зависимость ускорения груза от времени.



$t, \text{с}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$a, \text{м/с}^2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,25	3,75

Определите, в какой момент t_0 груз начал своё движение. Чему равнялись масса груза m и коэффициент трения μ между грузом и плоскостью?

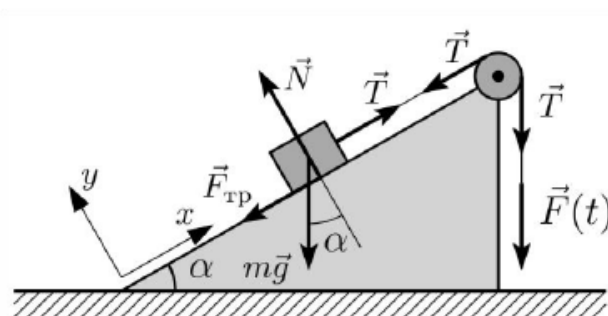
Считайте трос нерастяжимым и невесомым, блок также невесомым, трение в блоке отсутствует, ускорение свободного падения можно принять за 10 м/с^2 .

Решение

Покажем силы, действующие на груз, введём систему координат и запишем основное уравнение динамики для поднимающегося груза.

$$ma = -mg \sin \alpha + T - F_{\text{тр}},$$

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$



Из условия невесомости троса и блока и отсутствия сил трения в блоке следует равенство силы натяжения троса и приложенной силы: $T = F(t) = \kappa t$. Тогда

$$ma = -mg \sin \alpha + \kappa t - F_{\text{тр}}.$$

В этом уравнении в качестве силы трения может выступать сила трения покоя, и в этом случае груз не будет смещаться, его ускорение будет равно нулю: $a = 0$. Либо $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ — сила трения скольжения, груз поднимается, и тогда уравнение движения груза примет вид

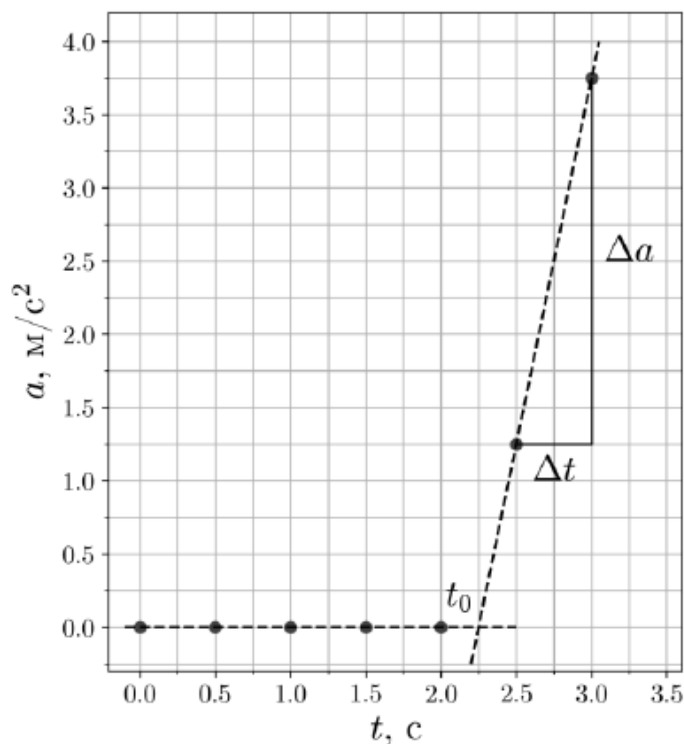
$$ma = -mg \sin \alpha + \kappa t - \mu mg \cos \alpha.$$

В этом случае ускорение груза можно найти как

$$a = \frac{k}{m}t - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Во всяком случае, ускорение груза либо равно нулю, либо линейно зависит от времени. Чтобы найти момент начала движения t_0 достаточно нанести все точки из таблицы на график, провести через них две прямые линии, как показано на рисунке, и найти их точку пересечения. Получаем $t_0 = 2,25$ с.

Для нахождения массы груза рассмотрим участок линейного возрастания ускорения. Угловым коэффициентом функции $a(t)$ на этом участке равен $\frac{k}{m}$, для его нахождения можно найти отношение изменения ускорения Δa к величине соответствующего промежутка времени Δt , например, между последними двумя точками из таблицы.



$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

$$m = \frac{k\Delta t}{\Delta a} = \frac{10 \cdot (3 - 2,5)}{3,75 - 1,25} = 2 \text{ кг.}$$

Коэффициент трения можно из найденного значения момента начала движения груза. В момент начала движения ускорение груза равно нулю:

$$0 = \frac{k}{m}t_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\frac{kt_0}{mg} - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Тогда получаем

$$\mu = \frac{\frac{10 \cdot 2,25}{2 \cdot 10} - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 0,72.$$

Также возможен полностью аналитический вариант решения задачи. Для этого рассмотрим две последние точки в таблице. Обозначим соответствующие моменты времени за t_1, t_2 , ускорения груза — a_1, a_2 . Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k}{m} t_1 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \\ a_2 &= \frac{k}{m} t_2 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим выражения для массы груза:

$$m = \frac{k(t_2 - t_1)}{a_2 - a_1} = 2 \text{ кг},$$

и для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{a_1 t_2 - a_2 t_1 + g \sin \alpha (t_2 - t_1)}{g(t_1 - t_2) \cos \alpha} \approx 0,72.$$

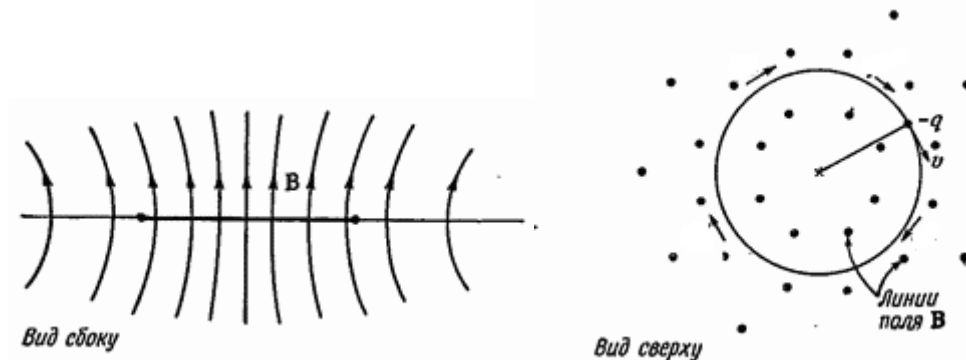
Получив эти значения, можно найти t_0 :

$$0 = \frac{k}{m} t_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad t_0 = \frac{mg}{k} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 2,25 \text{ с}.$$

№	Критерий	Значение	Балл
1	Записано основное уравнение динамики для груза на наклонной плоскости.	$ma = -mg \sin \alpha + T - F_{\text{тр}},$ $0 = N - mg \cos \alpha.$	2
2	Найдена зависимость ускорения груза от времени при условии подъёма груза.	$a = \frac{k}{m} t - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$	2
3	Найдено время начала движения.	$t_0 = 2,25 \text{ с}$	2
4	Найдена масса груза	$m = 2 \text{ кг}$	2
5	Найден коэффициент трения	$\mu = 0,71 \div 0,74$	2

Задача 5. Возрастающее магнитное поле.

При каком условии не будет меняться радиус кривизны траектории электрона при движении в возрастающем магнитном поле? Поле растёт медленно, оно симметрично относительно центра окружности и имеет такую конфигурацию, как показано на рисунке.



Возможное решение:

1. Магнитное поле симметрично относительно центра окружности и зависит от расстояния до оси симметрии. Меняющееся магнитное поле создает электрическое поле E , касательное к орбите электрона, которое будет двигать его по окружности. Вследствие симметрии это электрическое поле всюду на окружности принимает одну и ту же величину. Пусть орбита электрона равна r .
2. $\varepsilon_i = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$, $\varepsilon_i = \frac{A_{\text{э}}}{q} = \sum_i E \Delta l_i$, где Δl_i – элемент траектории движения электрона.
3. $\sum_i E \Delta l_i = E \cdot 2\pi r$, $\Delta\Phi = \Delta B_{\text{ср}} \cdot \pi r^2$, где $B_{\text{ср}}$ – среднее магнитное поле внутри окружности.
4. Получаем $E = \frac{r \Delta B_{\text{ср}}}{2 \Delta t}$.
5. Под действием электрической силы электрон будет ускоряться: $qE = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$.
6. $\frac{m \Delta v}{\Delta t} = q \frac{r \Delta B_{\text{ср}}}{2 \Delta t}$
7. На электрон действует сила Лоренца, которая меняет скорость по направлению $qvB_0 = \frac{mv^2}{r}$, где B_0 – магнитная индукция на орбите электрона.
8. $B_0 = \frac{mv}{qr}$, то есть $B_0 \sim v$. Сравнивая п.6 и п.8, получим, что $\Delta B_{\text{ср}} = 2\Delta B_0$. Т. е. для неизменности радиуса орбиты электрона нужно, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите.

Система оценивания задачи:

Указано, что вихревое поле будет одинаковым на окружности – **1 балл**

Написано определение ЭДС индукции – **1 балл**

Найдена работа вихревого поля по контуру – **1 балл**

Найден поток из п.3 – **1 балл**

Получено выражение из п.4 – **1 балл**

Найдено выражение в п.5 – **1 балл**

Найдено выражение из п.6 – **1 балл**

Найдено выражение из пункта 7 – **1 балл**

Найдена связь средней индукции и индукции на орбите – **2 балл**