

11 класс. Решения и критерии.

11-1. На горизонтальной подставке лежит груз, прикрепленный к потолку вертикальной нерастянутой пружиной. Подставка начинает опускаться вниз с постоянным ускорением $a=2g/5$, g — ускорение свободного падения. Найдите, за какой промежуток времени τ после отрыва груза от подставки пружина растянется на максимальную длину. Известен период T свободных колебаний груза на пружине.

Решение

Рассмотрим сначала движение груза вместе с подставкой. Направим ось x вниз и будем отсчитывать координату груза от начального положения, в котором пружина не растянута. За начало отсчёта времени выберем момент начала движения. Запишем для груза второй закон Ньютона в проекции на ось x :

$$ma = mg - kx - N,$$

m — масса груза, k — жёсткость пружины, N — сила нормальной реакции, действующая со стороны подставки. Пусть x_0 — координата груза в момент отрыва от подставки. Учитывая, что в этот момент сила N обращается в нуль, получаем:

$$ma = mg - kx_0 \quad \longrightarrow \quad x_0 = \frac{m}{k}(g - a) = \frac{g - a}{\omega^2},$$

$\omega = \sqrt{k/m}$ — частота свободных колебаний груза на пружине. Найдём скорость V_0 , которую имеет груз в момент отрыва:

$$V_0 = at, \quad x_0 = \frac{at^2}{2} \quad \longrightarrow \quad x_0 = \frac{V_0^2}{2a} \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{2ax_0} = \frac{\sqrt{2a(g-a)}}{\omega}.$$

После отрыва груз совершает гармонические колебания с частотой ω . Найдём координату положения равновесия x_p :

$$kx_p = mg \quad \longrightarrow \quad x_p = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Для описания колебаний введём новую координату y , отсчитанную от положения равновесия:

$$y = x - x_p.$$

Время будем отсчитывать от момента отрыва. Начальное значение координаты y равно:

$$y_0 = x_0 - x_p = \frac{g-a}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{a}{\omega^2}.$$

Начальная скорость груза равна V_0 . Зависимости от времени координаты и скорости груза при колебаниях определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} y &= A \sin(\omega t + \varphi), \\ V_y &= \omega A \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

A — амплитуда колебаний (положительная величина), φ — начальная фаза. Полагая $t = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} y_0 &= A \sin \varphi, \\ V_0 &= \omega A \cos \varphi. \end{aligned}$$

Так как $y_0 < 0$, то угол φ лежит в четвёртой четверти. Выразим его через арктангенс:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega y_0}{V_0} = -\frac{a}{\sqrt{2a(g-a)}} = -\sqrt{\frac{a}{2(g-a)}} \rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{2(g-a)}}.$$

В момент времени τ , когда пружина растянута на максимальную длину, скорость груза обращается в нуль:

$$V_y = 0 \rightarrow \cos(\omega \tau + \varphi) = 0 \rightarrow \omega \tau + \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Полагая $\omega = 2\pi/T$, получаем:

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{2(g-a)}}.$$

Этот результат можно получить по-другому, представив τ в виде:

$$\tau = \tau' + \frac{T}{4},$$

где τ' — время движения от момента отрыва до положения равновесия, $T/4$ — время движения от положения равновесия до момента максимального удлинения пружины. Для τ' имеем:

$$y = 0 \rightarrow \sin(\omega \tau' + \varphi) = 0 \rightarrow \omega \tau' + \varphi = 0 \rightarrow \tau' = -\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{2(g-a)}}.$$

При $a = 2g/5$ результат для τ упрощается:

$$\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{T}{3}$$

Ответ: $\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{2(g-a)}} = \frac{T}{3}$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записан II закон Ньютона для груза m и найдена координата груза m в момент отрыва от подставки	2
2	Записаны кинематические уравнения для груза m в момент отрыва и найдена скорость V_0	2
3	Записаны зависимости от времени координаты и скорости груза при колебаниях и их уравнения в момент отрыва	2
4	Написано уравнение для начальной фазы φ и посчитано её значение	2
5	Записано условие максимального растяжения пружины при $V_y = 0$ в момент времени τ и получен правильный ответ	2
	ИТОГО:	10

11-2. Горизонтальный цилиндр закрыт свободно скользящим поршнем. В цилиндре находится водяной пар при температуре $T_1 = 453$ К и давлении $2P_0$, $P_0 = 0,1$ МПа. Пар изохорически охлаждают до температуры $T_2 = 373$ К, а затем изотермически уменьшают его объём в 2 раза. При этом внешние силы, действующие на поршень, совершают работу $A = 450$ Дж. Найдите массу m сконденсировавшейся воды. Давление насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 равно соответственно $10P_0$ и P_0 , молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Объёмом воды по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар считайте идеальным газом.

Решение

Рассмотрим изотермы пара на диаграмме (P, V) . При температурах ниже критической (647 К для воды) на изотермах имеются горизонтальные участки постоянного давления, соответствующие насыщенному пару. Давление на этих участках при температурах T_1 и T_2 равно соответственно $10P_0$ и P_0 . Так как начальное давление $2P_0$ меньше чем $10P_0$, то в начальном состоянии имеем ненасыщенный пар. Пусть ν_1 – число молей пара, V_1 – его объём. Тогда:

$$2P_0 V_1 = \nu_1 R T_1.$$

Выясним, будет ли пар насыщенным после изохорического охлаждения. Обозначим через V_H максимальный объём, который могут занимать ν_1 молей насыщенного пара при температуре T_2 . Учитывая, что давление насыщенного пара при этой температуре равно P_0 , имеем:

$$P_0 V_H = \nu_1 R T_2.$$

Поделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{2V_1}{V_H} = \frac{T_1}{T_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_H} = \frac{T_1}{2T_2} \approx 0,6$$

Так как $V_1 < V_H$, то после изохорического охлаждения пар становится насыщенным. Точка, изображающая его состояние на диаграмме (P, V) , лежит на горизонтальном участке изотермы T_2 . Поэтому дальнейшее изотермическое сжатие пара идёт при постоянном давлении P_0 и работа внешних сил легко вычисляется:

$$A = P_0 \left(V_1 - \frac{V_1}{2} \right) = \frac{P_0 V_1}{2} \quad \longrightarrow \quad P_0 V_1 = 2A.$$

Пусть ν – число молей сконденсировавшейся воды. Тогда число молей пара в конечном состоянии равно $(\nu_1 - \nu)$. Пренебрегая объёмом воды по сравнению с объёмом пара, получаем:

$$P_0 \frac{V_1}{2} = (\nu_1 - \nu) R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu = \nu_1 - \frac{P_0 V_1}{2 R T_2} = \nu_1 - \frac{A}{R T_2}.$$

Начальное число молей пара равно:

$$\nu_1 = \frac{2P_0 V_1}{R T_1} = \frac{4A}{R T_1}.$$

Масса m сконденсировавшейся воды равна:

$$m = \mu \nu = \mu \left(\frac{4A}{R T_1} - \frac{A}{R T_2} \right) = \frac{\mu A (4T_2 - T_1)}{R T_1 T_2}.$$

Подставим числовые значения:

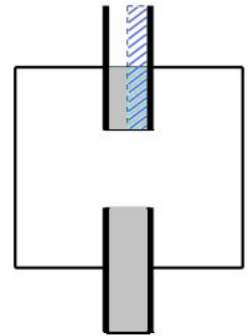
$$m = \frac{0,018 \cdot 450 \cdot (4 \cdot 373 - 453)}{8,31 \cdot 453 \cdot 373} = 0,006 \text{ кг} = 6 \text{ г}$$

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Верно записано уравнение состояния идеального газа для начального состояния	2
2	Верно записано уравнение состояния идеального газа после изохорического охлаждения	2
3	Определено выражение для работы внешних сил при	2

	изотермическом сжатии	
4	Найдено количество сконденсировавшейся воды	2
5	Проведены расчеты и записан ответ	2
	ИТОГО:	10

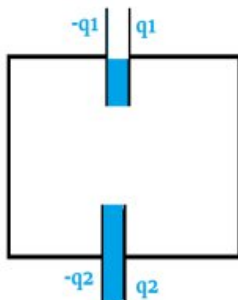
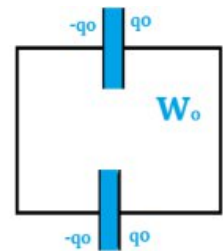
11-3. Конденсаторы представляют собой плоские прямоугольные ящики с металлическими боковыми стенками, покрытыми тонкой диэлектрической плёнкой. Внутри ящики заполнены водой (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 81$). Конденсаторы подключают поочередно к источнику питания и соединяют между собой параллельно. Суммарно источником питания была затрачена работа $W_0 = 100$ мДж. В результате поломки из одного из конденсаторов вылилась половина воды. Оставшаяся половина воды распределилась в этом конденсаторе так, что соединила собою обкладки, а граница с воздухом оказалась нормальной к обкладкам, см. рисунок. Какую работу нужно совершить, чтобы прижать воду к одной из обкладок, так чтобы граница воды с воздухом была параллельна обкладкам (соответствующая область выделена штриховкой на Рисунке)? Гравитацией и капиллярными эффектами пренебречь.



Решение. Рассмотрим ситуацию после зарядки конденсаторов и перед поломкой одного из них. Энергия системы (затраченная работа источником питания) равна

$$W_0 = \frac{2q_0^2}{2C_0} = \frac{q_0^2}{C_0}$$

Здесь C_0 – ёмкость неполоманного конденсатора.



После поломки одного из конденсаторов заряды на обкладках конденсаторов перераспределяются, так что $2q_0 = q_1 + q_2$. Распределение зарядов между конденсаторами находим из условия, что напряжения на обкладках обоих конденсаторов должны совпадать,

$$U = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_0}$$

Ёмкость поломанного конденсатора может быть вычислена как результат параллельного соединения двух конденсаторов половинного размера, один без воды, а другой с водой:

$$C_1 = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2\varepsilon} = \frac{(\varepsilon + 1)C_0}{2\varepsilon} \Rightarrow q_1 = \frac{(\varepsilon + 1)q_2}{2\varepsilon}$$

В результате находим, что заряды

$$q_2 = \frac{4\varepsilon q_0}{3\varepsilon + 1}, \quad q_1 = \frac{2(\varepsilon + 1)q_0}{3\varepsilon + 1},$$

А полная энергия

$$W_I = \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_0} = \frac{4(\varepsilon + 1)^2 q_0^2 2\varepsilon}{2(3\varepsilon + 1)^2 (\varepsilon + 1) C_0} + \frac{16\varepsilon^2 q_0^2}{2(3\varepsilon + 1)^2 C_0} = \frac{4\varepsilon}{3\varepsilon + 1} \frac{q_0^2}{C_0} = 1,33W_0$$

Теперь рассмотрим, какова будет энергия системы, если в поломанном конденсаторе изменится расположение воды. Распределение зарядов на конденсаторах обозначим q_3 (поломанный) и q_4 , из закона сохранения заряда $2q_0 = q_3 + q_4$. Снова запишем условие равенства напряжений,

$$U = \frac{q_3}{C_3} = \frac{q_4}{C_0},$$

но теперь поломанный конденсатор можно представить как последовательное соединение двух конденсаторов половинной толщины, так что

$$C_3 = \left(\frac{1}{2 \frac{C_0}{\varepsilon}} + \frac{1}{2C_0} \right)^{-1} = \frac{2C_0}{\varepsilon + 1}.$$

Поэтому заряды

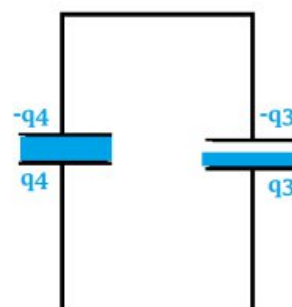
$$q_3 = \frac{4q_0}{\varepsilon + 3}, \quad q_4 = \frac{2(\varepsilon + 1)q_0}{\varepsilon + 3},$$

а полная энергия

$$W_{II} = \frac{q_4^2}{C_0} + \frac{q_3^2}{C_3} = \frac{4(\varepsilon + 1)^2 q_0^2}{2(\varepsilon + 3)^2 C_0} + \frac{16(\varepsilon + 1)q_0^2}{2(\varepsilon + 3)^2 2C_0} = \frac{q_0^2}{C_0} \frac{2(\varepsilon + 1)}{\varepsilon + 3} = 1,95W_0.$$

Разность энергий даёт как раз (минимальную) работу, которую нужно совершить, чтобы перевести систему из одного состояния в другое, то есть

$$A = W_{II} - W_I = \frac{2(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + 3)(3\varepsilon + 1)} W_0 = 0,62 W_0 = 62 \text{ мДж}.$$



Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Записана энергия исправного конденсатора	2
2	Записана емкость конденсатора, наполовину заполненного водой в 1 положении	2
3	Записана емкость конденсатора, наполовину заполненного водой в 2 положении	2
4	Найдена полная энергия для первого состояния поломанного конденсатора	2
5	Найдена работа, записан ответ	2
	ИТОГО:	10

11-4. В ясный солнечный день на поверхности пруда плавает плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме квадрата со стороной 2 м. Какова глубина пруда, если при затягивании неба сплошной облачностью тень на дне пруда вырождается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха $n = 1,33$. Поверхность воды считать гладкой. Толщиной плота пренебречь.

Решение



В ясный день плот освещается прямыми солнечными лучами. В силу их высокой параллельности тень плота на горизонтальном дне тождественна по своим очертаниям самому плоту. Отсюда следует, что плот должен иметь форму квадрата со стороной $L = 2$ м.

При сплошной облачности плот освещается рассеянными лучами.

При этом с точки A и B, ограничивающие сторону плота падают лучи с углами падения от 0 до 90° . Границы тени будут определяться лучами 1 и 2, падающими в точки A и B под углом 90° . Для них из закона преломления имеем:

$$1/\sin \beta = n, \quad (1)$$

где β – угол преломления для лучей 1 и 2.

Из рисунка следует, что глубина h , при которой тень плота вырождается в точку, должна удовлетворять уравнению:

$$0,5L \sin \beta \sqrt{h^2 + (0,5L)^2}. \quad (2)$$

Решая систему уравнения (1) и (2) относительно h , можно найти:

$$H = 0,5L \sqrt{n^2 - 1} = 0,88 \text{ м.}$$

**Кри
тери
и
оцен
ива
ния**

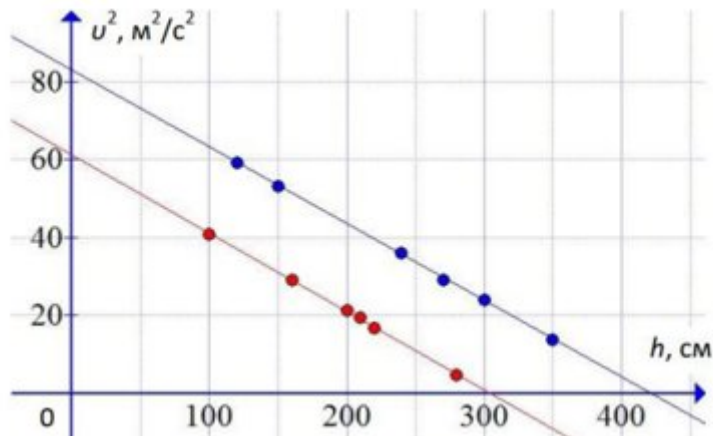
11-5. В баллистической лаборатории исследовались зависимости значений скорости v шарика, выпущенного вверх из небольшой катапульты, стоящей на столе, от высоты h его подъёма над уровнем стола. К сожалению, в спешке в таблицу с результатами измерений попали данные для двух разных шариков.

$h, \text{ см}$	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400
$v, \text{ м/с}$	4,1	6,0	3,7	7,3	2,2	5,4	5,5	7,7	4,9	4,4	6,4	4

1. Определите, какие данные относятся к одному, а какие к другому шарiku. Для этого постройте график с результатами измерений в таких координатах, в которых он должен быть линейным.
2. Рассчитайте, во сколько раз отличаются максимальные высоты подъёма шариков над столом.
3. Определите времена полёта шариков. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение

Из закона сохранения энергии $mu^2/2 = mv^2/2 + mgh$, где u — скорость на уровне стола. Следовательно, зависимость скорости от высоты будет линейной, например, в осях $v^2(h)$. Построим график $v^2(h)$ и нанесём экспериментальные точки.



Все точки хорошо разделились, ложась на две прямые. Точки, относящиеся к одному шарiku:

№	1	2	3	4	5	6
h , см	120	150	240	270	300	350
v , м/с	7,7	7,3	6,0	5,5	4,9	3,7

Точки, относящиеся к другому шарiku:

№	1	2	3	4	5	6
h , см	100	160	200	210	220	280
v , м/с	6,4	5,4	4,6	4,4	4,1	2,2

Прямые пересекают ось h в точках 310 см и 425 см. Это максимальные высоты шариков. Времена полёта шариков t_2 равно удвоенному времени падения t_1 с максимальные высоты. $t_2 = 2t_1$, где $t_1 = \sqrt{2h/g}$.

Для одного шарика $t_3 \approx 1,57$ с, а для другого $t_4 \approx 1,84$ с. (2 балла)

Критерии оценивания

№ п/п	Содержание критерия	Балл
1	Показано, что зависимость скорости от высоты будет линейной в осях $v^2(h)$	2
2	Построен график $v^2(h)$	3
3	Указаны точки, относящиеся к каждому шарiku	1
4	Определено во сколько раз отличаются максимальные высоты подъёма шариков над столом	2
5	Определены времена полёта шариков	2
	ИТОГО:	10