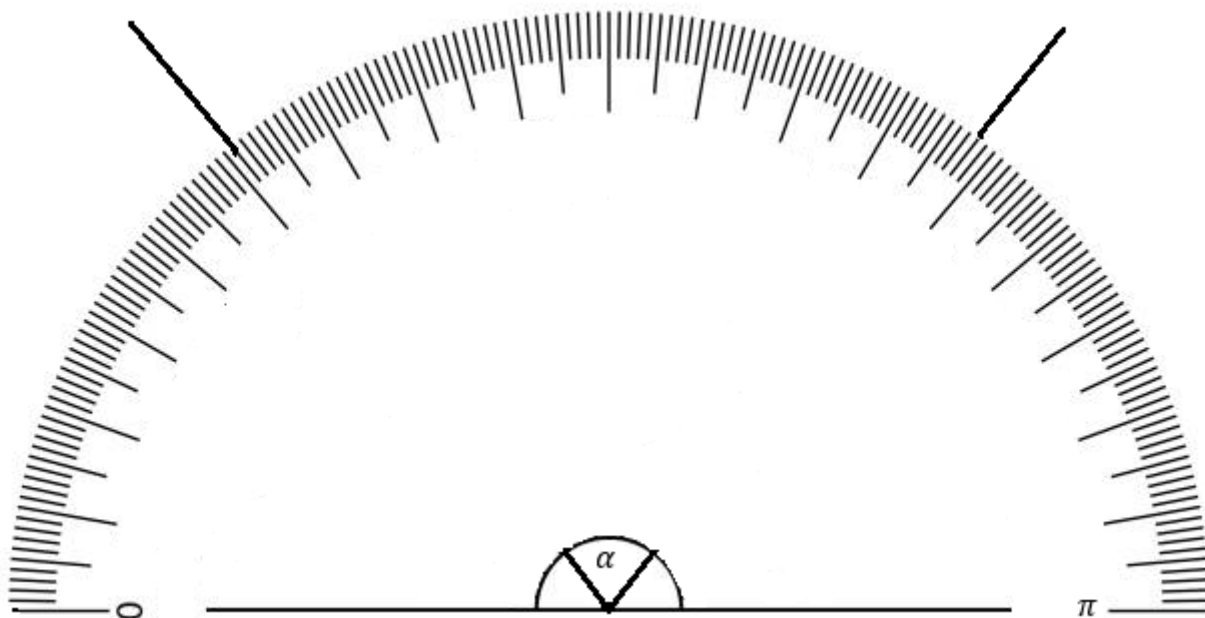


1. «Перевод единиц»

Известно, что плоские углы можно измерять в градусах. В международной системе единиц (СИ) в качестве единицы измерения плоских углов принят 1 радиан (сокращённо рад). Известно, что развёрнутый угол в 180° равен в СИ 3,14159 радиан (или числу π). Определите по рисунку (с помощью транспортира на нём) величину плоского угла α в градусах и радианах.



Возможное решение:

1. Всего делений 180.
2. Развёрнутый угол равен числу π или 180° . Значит, цена деления равна $\frac{\pi}{180}$ радиан или 1° .
3. α равен 138-51 делений. Следовательно, $\alpha = 87^\circ$ или $\alpha = \frac{87\pi}{180}$.

Система оценивания задачи:

Посчитано количество делений – **2 балла**

Определена цена деления транспортира в радианах – **2 балла**

Определена цена деления транспортира в градусах – **2 балла**

Определён угол α в градусах – **2 балла**

Определён угол α в радианах – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

2. «Средняя плотность»

В сосуд с водой опускают свинцовый шар объёма $V_2 = \frac{V_0}{5}$, где V_0 – объём всего сосуда. После этого сосуд ставят в холодильник. Найдите изменение средней плотности содержимого сосуда после вынимания из холодильника, если до помещения сосуда в холодильник он был доверху заполнен водой, а после того, как его вытащили из холодильника, сосуд был тоже доверху заполнен, но уже льдом. Плотность воды равна $\rho_1 = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, свинца $\rho_2 = 11,3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, льда $\rho_3 = 0,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Возможное решение:

- 1) До помещения в холодильник сосуда воды в сосуде $V_1 = 4 \frac{V_0}{5}$. После вынимания сосуда из холодильника льда в сосуде $V_3 = 4 \frac{V_0}{5}$.
- 2) До помещения сосуда в холодильник $\rho_{\text{ср}} = \frac{m_2+m_1}{V_0} = \frac{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1}{V_0} = \frac{\rho_2}{5} + \frac{4}{5} \rho_1$
- 3) После вынимания $\rho_{\text{ср}} = \frac{m_2+m_3}{V_0} = \frac{\rho_2 V_2 + \rho_3 V_3}{V_0} = \frac{\rho_2}{5} + \frac{4}{5} \rho_3$
- 4) $\Delta \rho_{\text{ср}} = \frac{4}{5} \rho_1 - \frac{4}{5} \rho_3 = 0,08 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

Система оценивания задачи:

Определён объём воды до помещения сосуда в холодильник – **1 балл**

Определён объём воды после вынимания сосуда из холодильника – **1 балл**

Рассчитана средняя плотность содержимого сосуда до помещения сосуда в холодильник – **3 балла**

Рассчитана средняя плотность содержимого сосуда после вынимания сосуда из холодильника – **3 балла**

Найдено изменение средней плотности содержимого сосуда – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

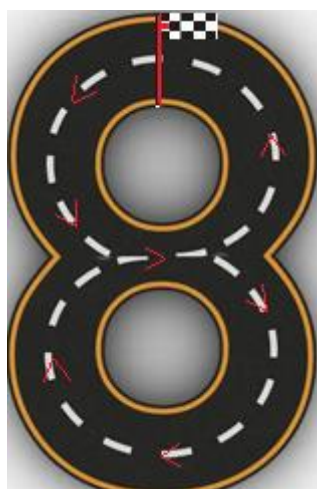
3. «Велосипедисты»

Два велосипедиста одновременно из одной точки начали заезд по дороге, имеющей форму цифры 8. Первый всегда едет быстрее второго. Второй во время заезда о чём-то глубоко задумался и несколько раз перепутал поворот так, что пришёл раньше первого, сделав то же количество кругов, что и второй. У первого велосипедиста скорость не больше 28,8 км/ч, а у второго не меньше 6 м/с, но не больше 7 м/с. Дорога симметричная и имеет длину 4 км. Общая дистанция заезда равна 20 км.

Мог ли второй обогнать первого, если бы повернул не туда лишь однажды?

Какая при этом должна быть скорость у первого велосипедиста?

Сколько поворотов должен был пропустить второй, чтобы гарантированно быть первым?



Возможное решение:

1) $v = \frac{l}{t} \Rightarrow t = \frac{l}{v}$

2) Первый сделал N кругов, где $N = \frac{20 \text{ км}}{4 \text{ км}} = 5$

3) Так как второй перепутал поворот минимум 1 раз и максимум 5 раз, то он прошёл путь $10 \text{ км} \leq s \leq 18 \text{ км}$.

4) Второй проехал дистанцию за время $1429 \text{ с} = \frac{10 \text{ км}}{7 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \leq t \leq \frac{18 \text{ км}}{6 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3000 \text{ с}$.

5) Первый проехал дистанцию за время $2500 \text{ с} = \frac{20 \text{ км}}{8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \leq t < \frac{20 \text{ км}}{6 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3333 \text{ с}$.

6) Из п.4 и п.5 следует, что сделав всего лишь 1 неверный поворот второй мог обогнать первого.

7) Время прохождения дистанции вторым при пропуске одного круга: $2571 \text{ с} =$

$$\frac{18 \text{ км}}{7 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \leq t \leq \frac{18 \text{ км}}{6 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 3000 \text{ с}.$$

8) Из п.6 и п.7 следует, что для того, чтобы второй обогнал первого, сделав один

неверный поворот, у первого должна была быть скорость $6 \frac{\text{м}}{\text{с}} < v < \frac{20 \text{ км}}{18 \text{ км}} * \frac{7 \text{ м}}{\text{с}} =$

$$\frac{70 \text{ м}}{9 \text{ с}}.$$

9) Чтобы гарантированно быть первым, второму необходимо пройти трассу

быстрее, чем за 2500 с . При этом он пройдёт путь $2500 \text{ с} * 6 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 15 \text{ км} \leq l \leq$

$2500 \text{ с} * 7 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 17,5 \text{ км}$. Значит, он должен пропустить минимум 3 поворота,

чтобы точно успеть раньше первого.

Система оценивания задачи:

Рассчитано число кругов – **1 балл**

Рассчитаны пути из п.3 – **1 балл**

Рассчитано время из п.4 – **1 балл**

Рассчитано время из п. 5 – **1 балл**

Сделан вывод из п.6 – **1 балл**

Рассчитано время из п. 7 – **1 балл**

Рассчитаны скорости из п. 8 – **2 балла**

Рассчитано количество поворотов из п.9 – **2 балла**

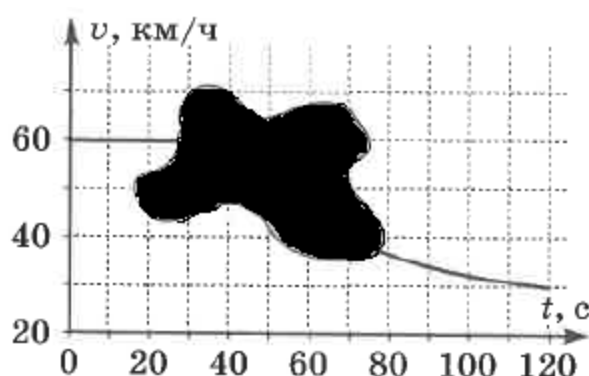
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Средняя скорость»

На графике изображена зависимость средней скорости автомобиля от времени. Часть графика оказалась утеряна из-за некорректной работы принтера. Известно, что автомобиль ехал равномерно первую половину пути по ровной дороге, а вторую тоже равномерно, но по грунтовой дороге.

Найдите:

- А) весь путь автомобиля за всё время движения;
- Б) время движения автомобиля на первой половине пути;
- В) скорость автомобиля на втором участке пути;
- Г) значение средней скорости через 50 с после начала движения.



Возможное решение:

- 1) Поскольку дан график зависимости средней скорости от времени, по последней точке графика можно вычислить весь пройденный путь: $S_0 = v * t = 30 \frac{\text{км}}{\text{ч}} * 120 \text{ с} = 1 \text{ км}$.
- 2) Так как первая половина пути была пройдена с постоянной скоростью, а средняя скорость равна $30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Поэтому время движения автомобиля на первой половине пути равно $t = \frac{0,5S_0}{v_1} = \frac{0,5\text{км}}{\frac{60\text{км}}{\text{ч}}} = 30 \text{ с}$.
- 3) Скорость автомобиля на втором участке постоянна, поэтому можем её найти по определению $v_2 = \frac{0,5S_0}{\Delta t} = \frac{0,5\text{км}}{(120-30)\text{с}} = 20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
- 4) Построим функцию зависимости средней скорости от времени на втором участке. По определению $v = \frac{s}{t} = \frac{0,5S_0 + v_2(t-30)}{t}$. Тогда средняя скорость через 50 секунд после начала движения равна $v(50) = \frac{0,5 \text{ км} + \frac{20\text{км}}{\text{ч}}(50-30)\text{с}}{50\text{с}} = \frac{36\text{км}}{\text{ч}} + \frac{8\text{км}}{\text{ч}} = 42 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Система оценивания задачи:

Написана формула средней скорости – 1 балл

Вычислен общий путь из п.1. – 1 балл

Рассчитано время из п.2. – 1 балл

Рассчитана скорость автомобиля на втором участке – 2 балла

Построена зависимость средней скорости от времени на втором участке – 3 балла

Рассчитана средняя скорость в момент времени 50 с – 2 балла

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов