

7 класс

Задача 1.

В пору осеннего грибного изобилия два соседа решили отправиться в лес. Внедорожник «Нива Legend» первого может проехать расстояние $l = 54$ км от Рязани до одного из грибных мест, имея постоянную скорость на асфальте $v_1 = 90$ км/ч, а на засыпанном щебенкой участке дороги $v_2 = 25$ км/ч. Седан «Toyota Corolla» второго на той же дороге по асфальту движется со скоростью $v_3 = 110$ км/ч, но по щебенке – $v_4 = 12$ км/ч.

1. При какой длине засыпанного щебенкой участка оба соседа одновременно приедут на грибное место? (ответ дать в километрах и округлить до десятых)

2. Определите время в пути для каждого соседа. (ответ дать в минутах и округлить до сотых)

3. Определите среднюю скорость движения каждого автомобиля. (ответ дать в км/ч, округлив до десятых)

4. Если первый сосед решит сократить свой путь на 10 км, проезжая по более короткой дороге, но на которой вдвое больше участков с щебенкой (по сравнению с первоначальным маршрутом), как это повлияет на время его движения? В каком случае и на сколько минут он приедет раньше: по изначальной дороге или по более короткой?

Решение:

1. Для того, чтобы оба соседа одновременно приехали на грибное место, нужно чтобы их время в пути было одинаковым $t_1 = t_2$.

l – общая длина пути.

l_1 – длина засыпанного щебенкой участка дороги.

$(l - l_1)$ – длина асфальтированного участка.

$$S = v \cdot t \rightarrow t = \frac{S}{v}$$

Автомобиль «Нива» затратит на движение по асфальту $t_{1a} = \frac{l - l_1}{v_1}$, а по щебенке $t_{1щ} = \frac{l_1}{v_2}$.

$$t_1 = t_{1a} + t_{1щ} = \frac{l - l_1}{v_1} + \frac{l_1}{v_2} - \text{общее время движения автомобиля «Нива»}.$$

Автомобиль «Toyota» затратит на движение по асфальту $t_{2a} = \frac{l - l_1}{v_3}$, а по щебенке $t_{2щ} = \frac{l_1}{v_4}$.

$$t_2 = t_{2a} + t_{2щ} = \frac{l - l_1}{v_3} + \frac{l_1}{v_4} - \text{общее время движения автомобиля «Toyota»}.$$

$$\frac{l - l_1}{v_1} + \frac{l_1}{v_2} = \frac{l - l_1}{v_3} + \frac{l_1}{v_4} \quad (1)$$

$$\frac{54 - l_1}{90} + \frac{l_1}{25} = \frac{54 - l_1}{110} + \frac{l_1}{12}$$

$$110(54 - l_1) + 396 l_1 = 90(54 - l_1) + 825 l_1$$

$$5940 - 110 l_1 + 396 l_1 = 4860 - 90 l_1 + 825 l_1$$

$$1080 = 449 l_1$$

$$l_1 = \frac{1080}{449} \approx 2,4 \text{ км}$$

$$2. t_1 = \frac{l - l_1}{v_1} + \frac{l_1}{v_2} = \frac{54 - 2,4}{90} + \frac{2,4}{25} \approx 0,67 \text{ ч} \approx 40,16 \text{ мин}$$

$$t_2 = \frac{l - l_1}{v_3} + \frac{l_1}{v_4} = \frac{54 - 2,4}{110} + \frac{2,4}{12} \approx 0,67 \text{ ч} \approx 40,16 \text{ мин}$$

$$3. v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{весь}}}{t_{\text{все}}}$$

$$v_{\text{ср1}} = \frac{54}{0,67} \approx 80,6 \text{ км/ч}$$

$$v_{\text{ср2}} = \frac{54}{0,67} \approx 80,6 \text{ км/ч}$$

$$4. \text{ Длина нового маршрута } l_{\text{нов}} = 54 - 10 = 44 \text{ км}$$

Длина участка дороги засыпанного щебнем:

$$l_2 = 2 \cdot l_1 = 2 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ км}$$

Длина заасфальтированного участка дороги:

$$l_3 = l_{\text{нов}} - l_2 = 44 - 4,8 = 39,2 \text{ км}$$

$$\text{Время движения по щебенке: } t_{2\text{щ}*} = \frac{l_2}{v_2} = \frac{4,8}{25} \approx 0,192 \text{ ч}$$

$$\text{Время движения по асфальту: } t_{1\text{а}*} = \frac{l_3}{v_1} = \frac{39,2}{90} \approx 0,4356 \text{ ч}$$

$$t_{\text{нов}} = t_{1\text{а}*} + t_{2\text{щ}*} = 0,4356 + 0,192 \approx 0,6276 \text{ ч} \approx 37,66 \text{ мин}$$

$$\Delta t = t_1 - t_{\text{нов}} = 40,16 - 37,66 = 2,5 \text{ мин}$$

По более короткому маршруту «Нива» придет быстрее на 2,5 минуты.

Критерии оценивания

Записана формула $S = v \cdot t \rightarrow t = \frac{S}{v}$	1
Правильно записаны выражения для расчета времени движения по асфальту и щебенке для каждого автомобиля	2
Верно записано условие одновременного прибытия автомобилей в пункт назначения $t_1 = t_2$	1
Решено уравнение (1). Выполнены математические преобразования и получен верный ответ	2
Правильно рассчитано время движения каждого автомобиля	1
Правильно рассчитана средняя скорость движения каждого автомобиля	1
Осуществлен правильный расчёт времени движения по новому маршруту	1
Сделан вывод на основе сравнения времени движения по разным маршрутам	1
ИТОГО	10

Задача 2.

В мастерского скульптора Ивана находились большие блоки мрамора и литьевая смесь из гипса. Скульптор решил изготовить из них статую, состоящую из двух частей: голову – из мрамора, а остальные части тела отлить из гипса. Известно, что плотность мрамора $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$, а плотность гипса $\rho_2 = 1620 \text{ кг/м}^3$. По проекту общая масса статуи – 1 тонна, объем головы составляет одну шестую часть от общего объема статуи, а ее масса – одну четвертую всей массы статуи. Считать, что при приготовлении раствора из гипса его плотность не изменяется.

1. Найдите среднюю плотность статуи.
2. Найдите массу и объем головы статуи.
3. Определите массу и объем тела статуи.
4. Если бы вся статуя была вырезана из мрамора, какую она имела массу?
5. Если бы гипсовая часть статуи была полой (внутренний объем полости составляет 30% от объема тела), как и на сколько изменилась масса статуи?

Решение:

1. Средняя плотность статуи: $\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}$.

$m_{\text{Г}} = \frac{1}{4}m$ – масса головы статуи, изготовленная из мрамора.

$V_{\text{Г}} = \frac{1}{6}V$ – объем головы статуи, изготовленной из мрамора.

Часть статуи из мрамора: $\rho_1 = \frac{m_{\text{Г}}}{V_{\text{Г}}} = \frac{\frac{1}{4}m}{\frac{1}{6}V} = \frac{3}{2} \frac{m}{V} = \frac{3}{2} \rho_{\text{ср}}$

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{2\rho_1}{3} = \frac{2 \cdot 2700}{3} = 1800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Часть статуи из гипса: $\rho_2 = \frac{m_{\text{Т}}}{V_{\text{Т}}}$, где $m_{\text{Т}} = m - m_{\text{Г}}$, а $V_{\text{Т}} = V - V_{\text{Г}}$.

$$\rho_2 = \frac{m - m_{\text{Г}}}{V - V_{\text{Г}}} = \frac{m - \frac{1}{4}m}{V - \frac{1}{6}V} = \frac{\frac{3}{4} \cdot m}{\frac{5}{6} \cdot V} = \frac{9}{10} \cdot \frac{m}{V} = \frac{9}{10} \rho_{\text{ср}}$$

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{10}{9} \rho_2 = \frac{10 \cdot 1620}{9} = 1800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

2. $m_{\text{Г}} = \frac{1}{4}m = \frac{1}{4} \cdot 1000 = 250 \text{ кг}$ – масса головы статуи, изготовленная из мрамора.

$V_{\text{Г}} = \frac{m_{\text{Г}}}{\rho_1} = \frac{250}{2700} = 0,093 \text{ м}^3$ – объем головы статуи, изготовленной из мрамора.

3. $m_{\text{Т}} = m - m_{\text{Г}} = 1000 - 250 = 750 \text{ кг}$ – масса тела статуи, изготовленного из гипса.

$\rho_2 = \frac{m_{\text{Т}}}{V_{\text{Т}}} \rightarrow V_{\text{Т}} = \frac{m_{\text{Т}}}{\rho_2} = \frac{750}{1620} = 0,46 \text{ м}^3$ – объем тела статуи, изготовленного из гипса.

4. Объем всей статуи: $V = V_{\text{Г}} + V_{\text{Т}} = 0,093 + 0,46 \approx 0,553 \text{ м}^3$

Масса статуи из мрамора: $m_{\text{статуиМ}} = \rho_1 \cdot V = 2700 \cdot 0,553 = 1493 \text{ кг}$

5. Объем полости статуи: $V_{\text{полости}} = 0,3 \cdot V_{\text{Т}} = 0,3 \cdot 0,46 = 0,138 \text{ м}^3$

Объем гипсовой части статуи: $V_{\text{гипс}} = V_{\text{т}} - V_{\text{полости}} = 0,46 - 0,138 = 0,322 \text{ м}^3$

Масса гипсовой части статуи: $m_{\text{гипс}} = \rho_2 \cdot V_{\text{гипс}} = 1620 \cdot 0,322 \approx 522 \text{ кг}$

Масса статуи: $m_{\text{статуи}} = m_{\text{г}} + m_{\text{гипс}} = 250 + 522 = 772 \text{ кг}$

Масса статуи изменилась бы, если бы гипсовая часть статуи была полой. Изменение массы статуи составляет: $\Delta m = m - m_{\text{статуи}} = 1000 - 772 = 228 \text{ кг}$

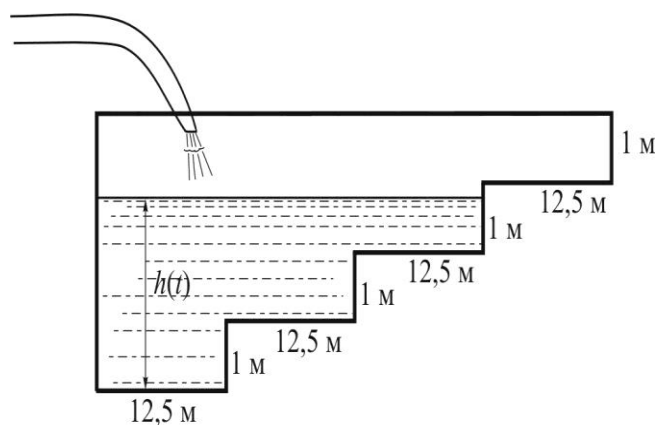
Таким образом масса статуи стала бы легче на 228 кг, если бы гипсовая часть статуи была полой при внутреннем объеме полости 30% от объема тела.

Критерии оценивания

Определена средняя плотность статуи	1
Рассчитана масса головы статуи из мрамора	1
Рассчитан объем головы статуи из мрамора	1
Рассчитана масса тела статуи из гипса	1
Рассчитана масса тела статуи из гипса	1
Рассчитана масса статуи из мрамора	2
Определены масса и объем гипсовой части статуи	2
Сделан вывод об изменении массы статуи, если бы гипсовая часть статуи была полой и определено изменение массы статуи	1
ИТОГО	10

Задача 3.

Имеется пятидесятиметровый бассейн шириной 20 м с профилем дна, показанным на рисунке: через каждые 12,5 м глубина бассейна увеличивается на 1 м. Перед тренировкой спортсменов пустой бассейн начинают заполнять водой, наливая ее со скоростью 1000 литров в минуту. Постройте график зависимости высоты h уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени t и определите, через какое время бассейн заполнится водой.



Решение:

Объём заполнения 1 метра бассейна от дна: $V_1 = a \cdot b \cdot h = 12,5 \cdot 20 \cdot 1 = 250 \text{ м}^3$

Так как скорость заполнения 1000 л/мин , то это значение переведем как $1 \text{ м}^3/\text{мин}$.

Тогда время заполнения первой части бассейна $t_1 = \frac{250}{1} = 250$ мин

Аналогичным образом рассчитаем заполнение второго метра бассейна:
 $V_2 = (12,5 \cdot 20 \cdot 1) + (12,5 \cdot 20 \cdot 1) = 500 \text{ м}^3$ или $V_2 = 2 (12,5 \cdot 20 \cdot 1) = 500 \text{ м}^3$

$$t_2 = \frac{500}{1} = 500 \text{ мин}$$

Заполнение третьего метра бассейна: $V_3 = 3 (12,5 \cdot 20 \cdot 1) = 750 \text{ м}^3$

$$t_3 = \frac{750}{1} = 750 \text{ мин}$$

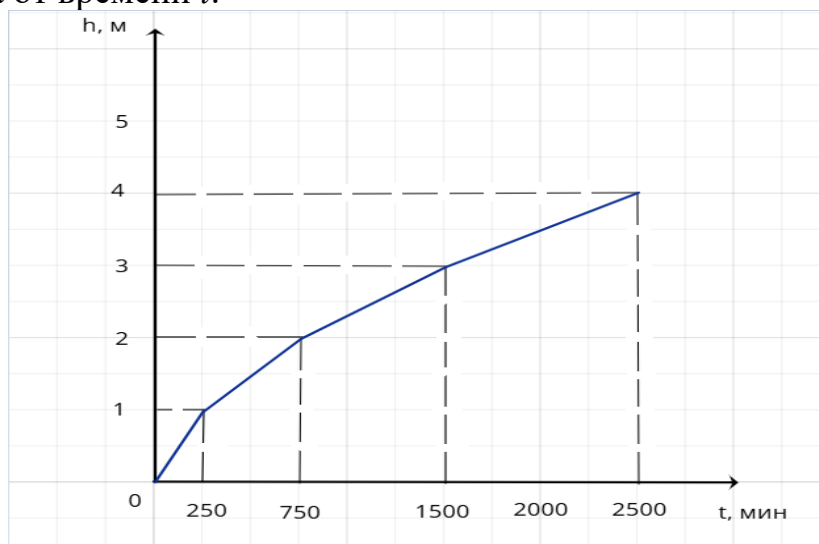
Заполнение четвертого метра бассейна: $V_4 = 4 (12,5 \cdot 20 \cdot 1) = 1000 \text{ м}^3$

$$t_4 = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ мин}$$

Таким образом бассейн будет заполнен:

$$t_0 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 250 + 500 + 750 + 1000 = 2500 \text{ мин}$$

График зависимости высоты h уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени t .



Критерии оценивания

Вычислены объемы каждого слоя воды (по 1 баллу за каждый слой)	4
Правильно рассчитано время заполнения каждого слоя (по 0,5 балла за каждый слой)	2
Рассчитано общее время заполнения бассейна водой	1
Правильное построение графика зависимости высоты уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени Выбраны оси координат и оцифрованы	1
Нанесены единицы измерения величин на оси координат	1
Построен график	1
ИТОГО	10

Задача 4.

Школьник решил изготовить глобус диаметром в один миллиард раз меньше диаметра планеты Земля. Поместится ли такой глобус в школьном классе? Чему будет равна длина экватора у модели? Насколько широкий шаг должен делать «человечек» ростом 2 мм и с какой скоростью идти, чтобы обойти весь глобус по экватору за 24 секунды? Радиус земли равен 6400 км. Выводы подтвердите расчетами.

Решение:

Диаметр планеты Земля составляет: $D=2R=2\cdot 6400=12800 \text{ км}=1,28\cdot 10^7 \text{ м}$.

Так как глобус имеет диаметр в один миллиард раз меньше диаметра планеты Земля, тогда его диаметр составляет:

$$D_{\text{гл}} = \frac{D}{1 \cdot 10^9} = \frac{1,28 \cdot 10^7}{1 \cdot 10^9} = 0,0128 \text{ м} = 1,28 \text{ см}$$

1,28 см – это примерный диаметр шарика для пинг-понга, который легко поместиться в любом классе.

Длина экватора на глобусе рассчитывается по формуле:

$$l = 2\pi R_{\text{гл}} = \pi D_{\text{гл}} = 3,14 \cdot 1,28 \approx 4,02 \text{ см} \approx 0,0402 \text{ м}$$

Скорость «человечка» на поверхности глобуса при движении по экватору: $v = \frac{l}{t} = \frac{0,0402}{24} \approx 0,001675 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Предположим, что «человек» делает примерно один шаг в секунду, следовательно, за 24 секунды он сделает 24 шага.

$$\text{Длина шага } l_{\text{шага}} = \frac{0,0402}{24} = 0,001675 \text{ м} = 1,675 \text{ мм}$$

Таким образом, чтобы пройти весь глобус по экватору за 24 секунды, «человечку» ростом 2 мм нужно делать шаг длиной 1,675 мм каждую секунду (длина шага почти как рост «человечка»).

Критерии оценивания

Определен диаметр Земли	1
Определен диаметр глобуса	2
Сделан вывод о том, что глобус может поместиться в классе	1
Рассчитана длина экватора (модели)	2
Правильно рассчитана скорость движения «человечка»	2
Рассчитана длина шага «человечка»	2
ИТОГО	10