

Возможные решения задач и критерии оценивания

7 класс 1-й вариант

Задача 1. Дорогие бусы.

Большая жемчужина диаметром 10 мм будет иметь объём в $2^3 = 8$ раз больше, чем маленькая жемчужина диаметром 5 мм. Предполагаем, что плотность жемчужин разного размера одинаковая, тогда масса большой жемчужины будет в 8 раз больше, чем масса маленькой. Кроме того большая жемчужина стоит в 2 раза дороже за грамм. Следовательно, одна большая жемчужина стоит в 16 раз дороже, чем одна маленькая жемчужина. Если нитка бус из больших жемчужин имеет ту же длину, то количество жемчужин в ней будет в 2 раза меньше, чем количество жемчужин в нитке из маленьких жемчужин. Поэтому нитка бус из жемчужин диаметром 10 мм будет стоить в 8 раз дороже, чем нитка из жемчужин диаметром 5 мм, то есть $8 \cdot 15000 = 120000$ рублей.

Ответ: 120 тысяч рублей.

Критерий	Баллы
В работе написано, что объём (масса) бус увеличивается как квадрат радиуса бусины; или рассмотрены отдельные бусины и написано, что объём (масса) увеличивается пропорционально кубу радиуса	4 балла
Использовано то, что длина бус остается постоянной, или что количество бусин уменьшается в 2 раза	2 балла
Получен правильный ответ для стоимости бус (120 тыс. рублей)	4 балла

Задача 2. Ох, рано встаёт охрана.

Выразим площадь парка в квадратных шагах. Получим $700 \cdot 432 = 302400$ квадратных шагов. Переведем площадь парка, равную 14 десятинам, в квадратные аршины. В 1 квадратной сажени $3 \cdot 3 = 9$ квадратных аршинов. Тогда площадь парка равна $14 \cdot 2400 \cdot 9 = 302400$ квадратных аршинов. Заметим, что численно площадь парка в квадратных шагах равна площади в квадратных аршинах, из чего делаем вывод, что 1 шаг равен 1 аршину.

Далее переведем длину парка в метры. 1 аршин = 28 дюймов = $28 \cdot 2,54 \text{ см} \approx 71 \text{ см}$. Тогда длина парка равна $700 \cdot 0,71 = 497 \text{ м}$. Если не округлять при переводе аршинов в сантиметры, получим длину парка $\approx 498 \text{ м}$.

Ответ: 1 шаг равен 1 аршину, длина парка приблизительно 498 м.

Критерий	Баллы
Площадь парка выражена в квадратных шагах (302400 кв. шагов)	2 балла
Площадь парка выражена в квадратных аршинах	2 балла
Получено, что длина шага равна 1 аршину	2 балла
Аршин переведен в сантиметры ($71,12 \text{ см} \approx 71 \text{ см}$) или метры	2 балла
Правильно посчитана длина парка (498 м) допускается отклонение ($\pm 5 \text{ м}$) из-за округления при вычислениях	2 балла

Задача 3. Пробки на дороге.

Обозначим весь путь S , а всё время движения t . По городу автомобиль проехал $1/3$ всего пути, значит время движения по городу можно выразить как $\frac{1}{3} \frac{S}{v_1}$. Поскольку $1/4$ всего времени движения автомобиль двигался в заторе, то время движения по трассе со скоростью v_2 можно представить как

$$\frac{3}{4}t - \frac{1}{3} \frac{S}{v_1}.$$

В заторе автомобиль ехал в течение времени $\frac{1}{4}t$ со скоростью v_3 . Суммарно по трассе автомобиль проехал расстояние

$$\left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{3} \frac{S}{v_1}\right) v_2 + \frac{1}{4}t v_3 = \frac{2}{3}S.$$

Перегруппируем слагаемые и получим

$$\frac{3}{4}t v_2 + \frac{1}{4}t v_3 = \frac{2}{3}S + \frac{1}{3} \frac{S v_2}{v_1}.$$

Преобразуем выражение, домножим на знаменатели и вынесем общие множители в левой и правой частях уравнения

$$(9v_1v_2 + 3v_1v_3)t = (8v_1 + 4v_2)S.$$

Средняя скорость автомобиля на всем пути равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{9v_1v_2 + 3v_1v_3}{8v_1 + 4v_2} = 51 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 51 км/ч

Критерий	Баллы
Выражено время $\frac{3}{4}t - \frac{1}{3} \frac{S}{v_1}$ движения со скоростью v_2	3 балла
Выражено суммарное расстояние по трассе $\left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{3} \frac{S}{v_1}\right) v_2 + \frac{1}{4}t v_3 = \frac{2}{3}S$	3 балла
Получен правильный ответ $\frac{S}{t} = \frac{9v_1v_2+3v_1v_3}{8v_1+4v_2} = 51 \text{ км/ч}$	4 балла

Задача 4. Пиастры.

По условию задачи переплавили одинаковое количество золотых дублонов и серебряных пиастров, обозначим это число n . Тогда суммарная стоимость переплавленных монет равна $5n$ пиастров. Поскольку каждая новая монета имеет номинал 2 пиастра, полное количество новых монет равно $5n/2$. Суммарная масса переплавленных монет $nm_1 + nm_2$ равна суммарной массе новых монет. Откуда получаем, что масса одной новой монеты равна

$$2(nm_1 + nm_2)/5n = 2(m_1 + m_2)/5 = 14 \text{ грамм.}$$

Монета имеет форму цилиндра. Объём цилиндра с площадью S и высотой h можно вычислить как $V = Sh$. Поскольку монета имеет постоянную толщину, отношение площади золотой середины к площади монеты равно отношению объёма золотой середины к объёму всей монеты. А отношение объёмов равно отношению объёма переплавленного золота к суммарному объёму золота и серебра, использованных для изготовления монет. Объём золотых дублонов равен nm_1/ρ_1 , а объём серебряных пиастров nm_2/ρ_2 . Отсюда доля объёма золота в общем объёме монеты равна

$$\frac{m_1/\rho_1}{m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2} = \frac{m_1\rho_2}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1}.$$

Таким образом, золотая середина занимает часть площади монеты, равную

$$\frac{m_1\rho_2}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1} \approx 0,12.$$

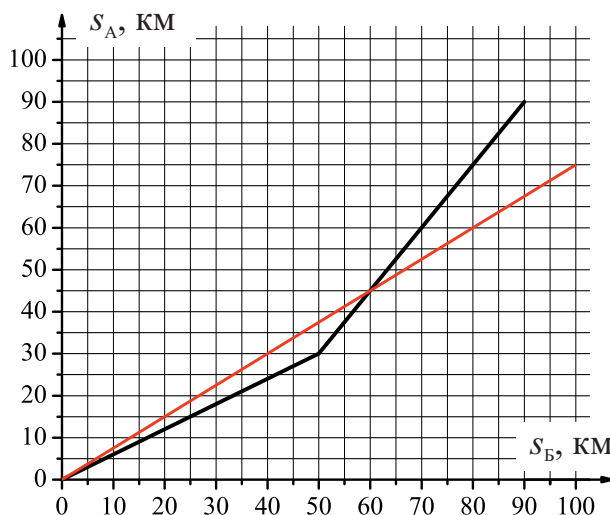
Ответ: масса монеты 14 грамм, центральная часть занимает $\approx 0,12$ от площади монеты.

Критерий	Баллы
Записана масса и стоимость переплавленных монет, или аналогичное условие, позволяющее вычислить массу биметаллической монеты	2 балла
Посчитана масса биметаллической монеты (14 грамм)	2 балла
Записано, что площадь пропорциональна объёму	2 балла
Посчитано соотношение объёмов золота и серебра в монете	2 балла
Получен ответ (золотая часть занимает приблизительно 0,12 площади монеты)	2 балла

Задача 5. Необычный график.

Отношение скоростей равно наклону зависимости на графике. На первом участке автомобиль Б проехал 50 км, за то же время автомобиль А проехал 30 км. Тогда отношение скорости автомобиля Б к скорости автомобиля А равно $5/3 \approx 1,67$. На втором участке автомобиль Б проехал 40 км, а автомобиль А за это время проехал 60 км. На втором участке отношение скоростей равно $2/3 \approx 0,67$. Наибольшее отношение скорости автомобиля Б к скорости автомобиля А достигается на 1м участке и равно 1,67.

Теперь найдём скорость автомобиля Б на каждом участке. По условию через 1 час после старта средняя скорость автомобиля Б в $4/3$ раза больше скорости автомобиля А. Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени движения. Значит путь, который к этому моменту проехал автомобиль Б, в $4/3$ раза больше пути автомобиля А. Построим на графике линию $s_B = 4/3 s_A$, которая пересекает график в точке $s_A = 45$ км и $s_B = 60$ км. Значит за 1 час автомобиль А проехал 45 км, то есть его скорость $v_A = 45$ км/ч. Тогда скорость автомобиля Б на первом участке $v_1 = 5/3 v_A = 75$ км/ч. Скорость автомобиля Б на втором участке $v_2 = 2/3 v_A = 30$ км/ч.



Ответ: наибольшее отношение скоростей равно 1,67; скорости $v_1 = 75$ км/ч, $v_2 = 30$ км/ч.

Критерий	Баллы
Записано, что отношение скоростей равно коэффициенту наклона графика	2 балла
Получено наибольшее отношение скоростей ($5/3 \approx 1,67$)	2 балла
Проведена линия $s_B = 4/3 s_A$. Если только найдена подходящая точка, но не показано, что других подходящих точек нет, то этот балл не ставим, но ставим баллы за значения скоростей	2 балла
Посчитана скорость $v_A = 45$ км/ч	2 балла
Найдены скорости автомобиля Б (75 км/ч и 30 км/ч)	2 балла

2-й вариант

Задача 1. Дорогие бусы.

Шарик из янтаря диаметром 10 мм будет иметь объём в $2^3 = 8$ раз больше, чем шарик диаметром 5 мм. Предполагаем, что плотность янтаря от размера шарика не зависит, тогда масса большой бусины будет в 8 раз больше, чем масса маленькой. Кроме того, большая бусина стоит в $300/200 = 1,5$ раза дороже за грамм. Следовательно, одна большая бусина из янтаря стоит в 12 раз дороже, чем одна маленькая бусина. Нитка из больших бусин имеет ту же длину, тогда количество бусин в ней будет в 2 раза меньше, чем количество бусин в нитке из маленьких бусин. Поэтому нитка бус из крупного янтаря диаметром 10 мм будет стоить в $12/2 = 6$ раз дороже, чем нитка из янтаря диаметром 5 мм, то есть $6 \cdot 2000 = 12000$ рублей.

Ответ: 12 000 рублей.

Критерий	Баллы
В работе написано, что объём (масса) бус увеличивается как квадрат радиуса бусины; или рассмотрены отдельные бусины и написано, что объём (масса) увеличивается пропорционально кубу радиуса	4 балла
Использовано то, что длина бус остается постоянной, или что количество бусин уменьшается в 2 раза	2 балла
Получен правильный ответ для стоимости бус (12 тыс. рублей)	4 балла

Задача 2. Прогулка по парку.

Выразим площадь парка в квадратных шагах. Получим $630 \cdot 480 = 302400$ квадратных шагов. Переведем площадь парка, равную 14 десятинам, в квадратные аршины. В 1 квадратной сажени $3 \cdot 3 = 9$ квадратных аршинов. Тогда площадь парка равна $14 \cdot 2400 \cdot 9 = 302400$ квадратных аршинов. Заметим, что численно площадь парка в квадратных шагах равна площади в квадратных аршинах, из чего делаем вывод, что длина 1 шага равна 1 аршину.

Далее переведем ширину парка в метры. 1 аршин = 28 дюймов = $28 \cdot 2,54 \text{ см} \approx 71 \text{ см}$. Тогда ширина парка равна $480 \cdot 0,71 = 341 \text{ м}$.

Ответ: 1 шаг равен 1 аршину, ширина парка 341 м.

Критерий	Баллы
Площадь парка выражена в квадратных шагах (302400 кв. шагов)	2 балла
Площадь парка выражена в квадратных аршинах	2 балла
Получено, что длина шага равна 1 аршину	2 балла
Аршин переведен в сантиметры ($71,12 \text{ см} \approx 71 \text{ см}$) или метры	2 балла
Правильно посчитана ширина парка (341 м) допускается небольшое отклонение из-за округления при подсчётах	2 балла

Задача 3. Пробки на дороге.

Обозначим весь путь S , а всё время движения t . По городу автомобиль проехал $1/4$ всего пути, значит время движения по городу можно выразить как $\frac{1}{4} \frac{S}{v_1}$. Поскольку $1/6$ всего времени движения автомобиль двигался в заторе, то время движения по трассе со скоростью v_2 можно представить как

$$\frac{5}{6}t - \frac{1}{4} \frac{S}{v_1}.$$

В заторе автомобиль ехал в течение времени $\frac{1}{6}t$ со скоростью v_3 . Суммарно по трассе автомобиль проехал расстояние

$$\left(\frac{5}{6}t - \frac{1}{4} \frac{S}{v_1}\right) v_2 + \frac{1}{6}t v_3 = \frac{3}{4}S.$$

Перегруппируем слагаемые и получим

$$\frac{5}{6}t v_2 + \frac{1}{6}t v_3 = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4} \frac{S v_2}{v_1}.$$

Преобразуем выражение. Домножим на знаменатель и вынесем общие множители в левой и правой частях уравнения

$$4v_1 (5v_2 + v_3) t = 6 (3v_1 + v_2) S.$$

Средняя скорость автомобиля на всем пути равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{4v_1 (5v_2 + v_3)}{6 (3v_1 + v_2)} = 56 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 56 км/ч

Критерий	Баллы
Выражено время $\frac{5}{6}t - \frac{1}{4} \frac{S}{v_1}$ движения со скоростью v_2	3 балла
Выражено суммарное расстояние по трассе $\left(\frac{5}{6}t - \frac{1}{4} \frac{S}{v_1}\right) v_2 + \frac{1}{6}t v_3 = \frac{3}{4}S$	3 балла
Получен правильный ответ $\frac{S}{t} = \frac{20v_1v_2+4v_1v_3}{18v_1+6v_2} = 56 \text{ км/ч}$	4 балла

Задача 4. Пиастры.

По условию задачи переплавили одинаковое количество золотых дублонов и серебряных пиастров, обозначим это число n . Тогда суммарная стоимость переплавленных монет равна $5n$ пиастров. Поскольку каждая новая монета имеет номинал 3 пиастра, полное количество новых монет равно $5n/3$. Суммарная масса переплавленных монет $nm_1 + nm_2$ равна суммарной массе новых монет. Откуда получаем, что масса одной новой монеты равна

$$3(nm_1 + nm_2)/5n = 3(m_1 + m_2)/5 = 21 \text{ г.}$$

Монета имеет форму цилиндра. Объём цилиндра с площадью S и высотой h можно вычислить как $V = Sh$. Поскольку монета имеет постоянную толщину, отношение площади серебряной середины ко всей площади монеты равно отношению объёма серебряной середины к объёму всей монеты. А отношение объёмов равно отношению объёма переплавленного серебра к суммарному объёму золота и серебра, использованных для изготовления монеты. Объём золотых дублонов равен nm_1/ρ_1 , а объём серебряных пиастров nm_2/ρ_2 . Отсюда доля объёма серебра в общем объёме монеты равна

$$\frac{m_2/\rho_2}{m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2} = \frac{m_2\rho_1}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1}.$$

Таким образом, серебряная середина занимает часть площади, равную

$$\frac{m_2\rho_1}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1} \approx 0,88.$$

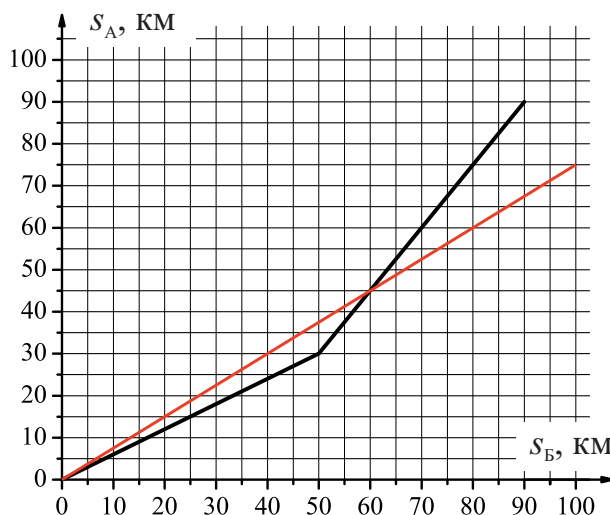
Ответ: масса монеты 21 грамм, центральная часть занимает $\approx 0,88$ от площади монеты.

Критерий	Баллы
Записана масса и стоимость переплавленных монет, или аналогичное условие, позволяющее вычислить массу биметаллической монеты	2 балла
Посчитана масса биметаллической монеты (21 грамм)	2 балла
Записано, что площадь пропорциональна объёму	2 балла
Посчитано соотношение объёмов золота и серебра в монете	2 балла
Получен ответ (серебряная часть занимает приблизительно 0,88 площади монеты)	2 балла

Задача 5. Необычный график.

Отношение скоростей равно наклону зависимости на графике. На первом участке автомобиль А проехал 30 км, за то же время автомобиль Б проехал 50 км. Тогда отношение скорости автомобиля А к скорости автомобиля Б равно $3/5 = 0,6$. На втором участке автомобиль А проехал 60 км, а автомобиль Б за это время проехал 40 км. На втором участке отношение скоростей v_A/v_B равно $3/2 = 1,5$. Тогда отношение наибольшей скорости автомобиля А к скорости автомобиля Б равно 1,5.

Теперь найдём скорость автомобиля А на каждом участке. По условию через 1 час после старта средняя скорость автомобиля А составляла $3/4$ от скорости автомобиля Б. Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени движения, значит путь, который к этому моменту проехал автомобиль А, составил $3/4$ от пути автомобиля Б. Построим на графике линию $s_A = 3/4 s_B$, которая пересекает график в точке $s_A = 45$ км и $s_B = 60$ км. Значит за 1 час автомобиль Б проехал 60 км, то есть его скорость $v_B = 60$ км/ч. Тогда скорость автомобиля А на первом участке $v_1 = 0,6 v_B = 36$ км/ч, а скорость на втором участке $v_2 = 1,5 v_B = 90$ км/ч.



Ответ: отношение скоростей 1,25; скорости $v_1 = 36$ км/ч, $v_2 = 90$ км/ч.

Критерий	Баллы
Записано, что отношение скоростей равно коэффициенту наклона графика	2 балла
Получено наибольшее отношение скоростей ($3/2 = 1,5$)	2 балла
Проведена линия $s_A = 3/4 s_B$. Если только найдена подходящая точка, но не показано, что других подходящих точек нет, то этот балл не ставим, но ставим баллы за значения скоростей	2 балла
Посчитана скорость $v_B = 60$ км/ч	2 балла
Найдены скорости автомобиля А (36 км/ч и 90 км/ч)	2 балла