

7.1. Как показывает эксперимент, время горения свечей из одинакового вещества и с одинаковым типом фитиля пропорционально объему свечи. Для отсчета времени на свечу наносят горизонтальные деления, соответствующие некоторым промежуткам времени.

А) Цилиндрическая свеча объемом высотой $H = 48$ см и диаметром $D = 8$ см горит в течение времени $T = 12$ часов. Сколько времени T_1 (в минутах) будет гореть свеча, все линейные размеры которой (диаметр и высота) в 2 раза меньше, чем у данной свечи?

Б) Во сколько раз изменится расстояние между делениями, соответствующими времени горения $\tau = 15$ минут?

Примечание: площадь круга S вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.

Решение.

А) Объем цилиндра: $V = \frac{\pi}{4} D^2 H$. Если диаметр и высоту свечи уменьшить в 2 раза, то объем свечи и время её горения уменьшатся в 8 раз. Следовательно, уменьшенная свеча горит 1,5 часа = 90 минут.

Б) У первой свечи расстояние между делениями 15 минут равно

$$H \cdot \frac{\tau}{T} = 48 \text{ см} \cdot \frac{1/4 \text{ ч}}{12 \text{ ч}} = 1 \text{ см}.$$

Для второй свечи:

$$\frac{H}{2} \cdot \frac{\tau}{T/8} = 24 \text{ см} \cdot \frac{1/4 \text{ ч}}{3/2 \text{ ч}} = \frac{24 \text{ см}}{6} = 4 \text{ см}.$$

Таким образом, расстояние между 15-минутными делениями увеличится в 4 раза.

Примечание

При решении п. А может использоваться коэффициент подобия: $V \propto a^3$, где a – линейные размеры тела.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула для объема цилиндра или формула для коэффициента подобия.	2
2	Получен вывод, что объем и время горения уменьшатся в 8 раз.	1
3	Посчитано время горения 1,5 ч = 90 мин.	1
4	Приведена формула для расчета расстояния между делениями времени на свечах	2
5	Посчитано численно расстояние между 15-минутными делениями на первой свечи	1
6	Посчитано численно расстояние между 15-минутными делениями на второй (уменьшенной) свечи	1
7	Получен вывод, что расстояние увеличится в 4 раза.	2
	Сумма	10

7.2. Школьник скачивает из сети Интернет 3 видеофайла. Известно, что I и II файлы вместе он скачивает за время $t_1 = 2000$ с, II и III вместе – за $t_2 = 2800$ с, I и III вместе – за $t_3 = 2400$ с. Общий размер файлов $S = 45$ гигабайт.

А) За какое время (в минутах) школьник скачает все три файла вместе?

Б) Какая скорость скачивания (в мегабитах в секунду)?

В) Каков размер (в гигабайтах) III файла?

Примечание: 1 байт = 8 бит, 1 мегабайт = 2^{20} байт $\approx 10^6$ байт, 1 гигабайт = 2^{30} байт $\approx 10^9$ байт.

Решение.

А) Пусть S_1, S_2, S_3 – размер каждого из файлов, v – скорость скачивания.

$$t_1 = \frac{S_1 + S_2}{v}; \quad (1)$$

$$t_2 = \frac{S_2 + S_3}{v}; \quad (2)$$

$$t_3 = \frac{S_1 + S_3}{v}. \quad (3)$$

Время скачивания 3 файлов вместе:

$$t = \frac{S}{v} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{v}. \quad (4)$$

Для решения системы уравнений (1)-(3) сложим их:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S_1 + S_2}{v} + \frac{S_2 + S_3}{v} + \frac{S_1 + S_3}{v} = 2 \frac{S_1 + S_2 + S_3}{v} = 2t. \quad (5)$$

Отсюда

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3) = 3600 \text{ с} = 60 \text{ мин.} \quad (6)$$

Б) Для определения скорости скачивания разделим общий размер файлов на время скачивания:

$$v = \frac{S}{t} \approx \frac{45000 \text{ мегабайт} \cdot 8 \text{ бит} / \text{байт}}{3600 \text{ с}} = 100 \text{ мегабит/с.} \quad (7)$$

В) Вычтем из уравнения (4) уравнение (1):

$$t - t_1 = \frac{S_3}{v}. \quad (8)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} S_3 &= v(t - t_1) = 100 \text{ мегабит} / \text{с} \cdot 1600 \text{ с} = 160000 \text{ мегабит} = \\ &= 20000 \text{ мегабайт} = 20 \text{ гигабайт} \end{aligned} \quad (9)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана система уравнений (1)-(4)	2
2	Получено выражение (6) для времени t	1
3	Получено численное значение $t = 60$ мин. Примечание: при ответе 3600 с или 1 час ставим 0,5 балла	1
4	Получено выражение (7) для скорости скачивания v	1
5	Получено численное значение $v = 100$ мегабит/с Примечание: при другой размерности ставим 0,5 балла	2
6	Получено выражение (9) для размера файла S_3 .	1
7	Получено численное значение $S_3 = 20$ гигабайт. Примечание: при другой размерности ставим 0,5 балла	2
	Сумма	10

7.3. В кубический аквариум с длиной ребер D , доверху наполненный водой, медленно опустили на дно шар диаметром D , в результате чего часть воды вылилась. После этого шар вынимают, и опускают новый шар диаметром $d = D/2$. Чему равно расстояние x от дна аквариума до поверхности воды в нем после опускания второго шара? Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

Решение.

Объем воды в аквариуме, доверху заполненного водой:

$$V_0 = D^3. \quad (1)$$

Объем первого шара:

$$V_D = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6} D^3. \quad (2)$$

При погружении шара в аквариум выливается объем воды, равный объему шара. Останется воды:

$$V_1 = V_0 - V_D = D^3 - \frac{\pi}{6} D^3 = D^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right). \quad (3)$$

Объем второго (маленького) шара:

$$V_d = \frac{\pi}{6} d^3. \quad (4)$$

Допустим, что второй шар полностью скрыт под водой. Тогда суммарный объем воды и второго шара:

$$V_2 = V_1 + V_d = D^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} d^3. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$V_2 = D^2 x, \quad (6)$$

где x – искомый уровень воды. Приравнивая выражения (5) и (6), получаем:

$$D^3 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} d^3 = D^2 x;$$

$$x = D \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \frac{d^3}{D^2}. \quad (7)$$

Подставляя $d = D/2$, получаем:

$$x = D \cdot \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{D}{8} = D \frac{48 - 7\pi}{48} \approx 0,542 \cdot D. \quad (8)$$

Поскольку $x > d$, то предположение о том, что второй шар скрыт под водой, справедливо.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записана формула (1) для объема воды в аквариуме	1
2	Записана формула (2) для объема первого шара через его диаметр	1
3	Найден объем оставшейся воды (3)	1
4	Записана формула (4) для объема второго шара через его диаметр	1
5	Записано и проверено предположение, что второй шар полностью скрыт под водой	2
6	Записан суммарный объем воды и второго шара (5)	1
7	Записано выражение (6) для объема воды и шара через уровень жидкости	1
8	Получен ответ $x \approx 0,542 \cdot D$.	2
	Сумма	10

7.4. Чёрная дыра – это область пространства, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть её не могут даже кванты света. По одной из моделей, радиус черной дыры задается формулой:

$$R_g = \frac{2G}{c^2} M,$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{с}^{-2} \text{кг}^{-1}$ – гравитационная постоянная, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме, M – масса черной дыры. Объем шара: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Определите, во сколько раз средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ вещества внутри сверхмассивной черной дыры Лебедь А, масса которой в 1 миллиард раз больше массы Солнца, отличается от плотности жидкой воды $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$? Масса Солнца $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$.

Решение.

Рассмотрим черную дыру как шар радиуса R_g . Тогда ее средняя плотность равна:

$$\rho_{cp} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_g^3} = \frac{3M}{4\pi} \left(\frac{c^2}{2GM} \right)^3 = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{\alpha}{M^2}, \quad (1)$$

где $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$ – размерная константа.

Найдем массу черной дыры Лебедь А:

$$M = 10^9 \cdot M_C = 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{39} \text{ кг}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\rho_{cp} = 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3 / (2 \cdot 10^{39} \text{ кг})^2 \approx 18,3 \text{ кг/м}^3. \quad (3)$$

Следовательно, плотность воды *больше* средней плотности черной дыры в $1000 \text{ кг/м}^3 / 18,3 \text{ кг/м}^3 \approx 54,8$ раза.

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Получена зависимость (1) для средней плотности черной дыры от её массы	2
2	Явно или неявно вычислен размерный коэффициент $\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{79} \text{ кг}^3 / \text{м}^3$	3
3	Найдена масса черной дыры $2 \cdot 10^{39} \text{ кг}$	1
4	Найдено числовое значение для плотности черной дыры $18,3 \text{ кг/м}^3$. Допустимы значения порядка 18-20 кг/м^3 .	2
5	Получен вывод, что плотность воды больше средней плотности сверхмассивных черных дыр	1
6	Получено численное значение отношения 54,8 (допустимо 50-60).	1
	Сумма	10