

1. «Полый шар»

Чугунный полый шар объёмом 30 дм^3 плавает в воде, погружившись наполовину. Определите объём полости в шаре. Плотность чугуна равна $\rho_1 = 7,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, плотность воды $\rho_2 = 1,0 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Возможное решение:

1) $m = \rho V$

2) $V_1 + V_{\text{п}} = V_0 = 30 \text{ дм}^3$

3) Условие равновесия шара $mg = F_a \Rightarrow \rho_1 V_1 g = \frac{1}{2} \rho_2 V_0 g$

4) $V_1 = \frac{\rho_2 V_0}{2\rho_1}$

5) $V_{\text{п}} = V_0 - \frac{\rho_2 V_0}{2\rho_1} = \frac{7,4}{7,9} * 30 \text{ дм}^3 = 28,1 \text{ дм}^3$

Система оценивания задачи:

Написана формула расчёта плотности тела – **2 балла**

Написано выражение из п.2 – **2 балла**

Написано условие равновесия (плавания) шара – **2 балла**

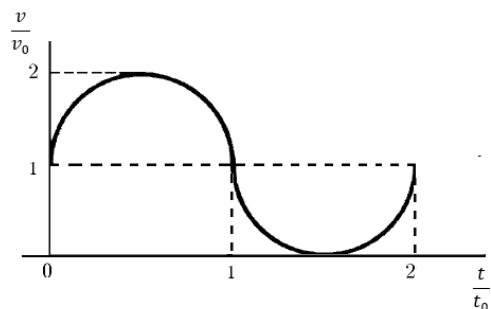
Выражен объём чугуна через объём шара – **2 балла**

Вычислен объём полости – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

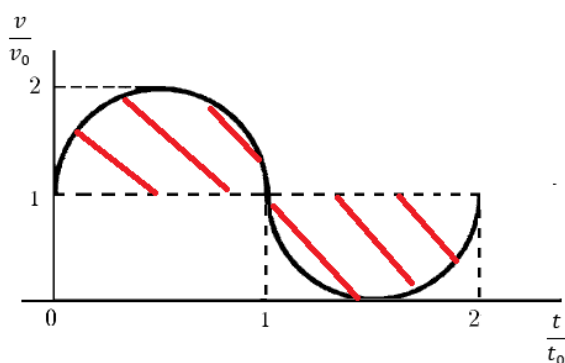
2. «Движение мухи»

Муха движется вдоль прямой со скоростью, зависимость которой от времени приведена на рисунке. Найдите по графику путь, который прошла муха от $\frac{t_0}{2}$ до $\frac{3t_0}{2}$, и скорость v_0 . Известно, что график составлен из одинаковых дуг окружностей, а весь путь за равен $S_0 = 5$ м, $t_0 = 8$ с.



Возможное решение:

- 1) Средняя скорость по определению $v_{\text{ср}} = \frac{S_0}{2t_0}$.
- 2) График симметричный: избыточную площадь на первой половине времени равна недостающей половине. Общий путь, как известно, равен площади под графиком зависимости скорости от времени. Таким образом, общий путь равен $S_0 = v_0 * 2t_0$.



- 3) Тогда $v_0 = \frac{S_0}{2t_0} = \frac{5 \text{ м}}{16 \text{ с}}$.
- 4) Путь от $\frac{t_0}{2}$ до $\frac{3t_0}{2}$ равен половине общего пути, т.е. 2,5 м, как видно из графика.

Система оценивания задачи:

Написано определение средней скорости – **3 балла**

Указано, что путь равен площади под графиком скорости от времени – **3 балла**

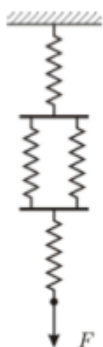
Рассчитана скорость v_0 – **3 балла**

Рассчитан путь от $\frac{t_0}{2}$ до $\frac{3t_0}{2}$ – **1 балл**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

3. «Соединение пружин»

Пружины, жёсткость каждой из которых одинакова, соединены так, как показано на рисунке. Чему равен коэффициент жёсткости пружин, если для того, чтобы точка приложения силы опустилась на $\Delta x = 10$ см, её необходимо тянуть с силой $F = 0,4$ Н?



Возможное решение:

- 1) Пусть пружины пронумерованы сверху вниз (1,2,3,4). Тогда в пружине 1 и 4 сила упругости равна F , а в пружинах 2,3 они равны $\frac{F}{2}$.
- 2) По закону Гука для каждой пружины $F_i = k\Delta x_i \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta x_4 = \frac{F}{k}; \Delta x_2 = \Delta x_3 = \frac{F}{2k}$
- 3) При опускании груза на Δx деформации пружин складываются так: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_4 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \frac{F}{k} + \frac{F}{k} + \frac{F}{2k} + \frac{F}{2k} = \frac{5F}{2k} \Rightarrow k = \frac{5F}{2\Delta x} = 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$

Система оценивания задачи:

Найдены силы упругости в каждой пружине из п.1 – **2 балла**

Записан закон Гука – **1 балл**

Рассчитаны деформации каждой пружины – **3 балла**

Выражено Δx через деформации всех пружин – **2 балла**

Найдена жёсткость пружин – **2 балла**

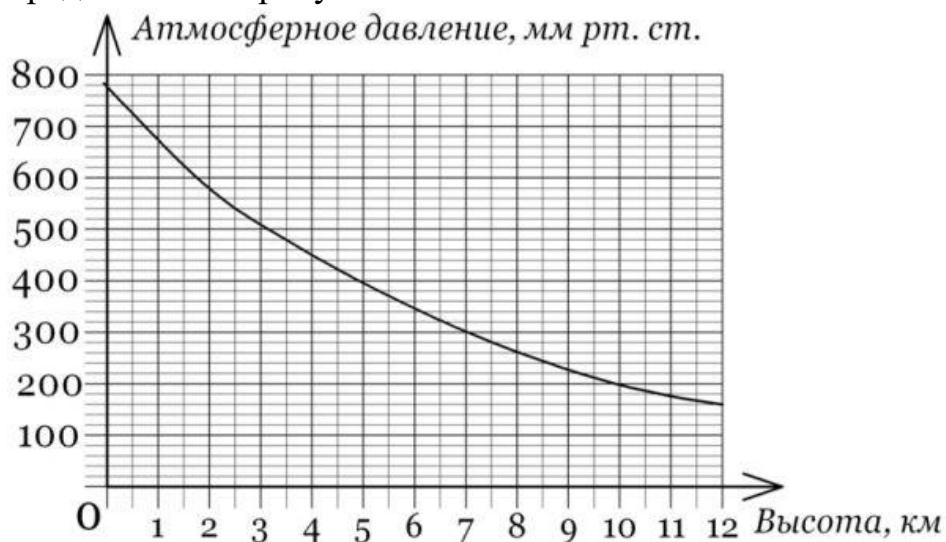
Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

4. «Под впечатлением от мультфильма»

Аркадий посмотрел мультфильм «Вверх» и решил попутешествовать над плато Путорана (1600 м над уровнем моря) в своём маленьком домике, прицепив к нему множество шаров. Шары Аркадий взял фольгированные, то есть у них есть максимальный объём, больше которого они надуваться не будут. Объём всех шариков одинаков и равен $V_{\text{ш}} = 100 \text{ дм}^3$. Средняя плотность шарика с содержимым равна $\rho = 0,1 \frac{\text{г}}{\text{дм}^3}$. Известно, что плотность атмосферного воздуха прямо пропорциональна атмосферному давлению на данной высоте. Плотность воздуха у поверхности земли равна $1300 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}$.

На какой высоте зависнет домик с шариками, если для того, чтобы подняться над поверхностью земли, необходимо минимум 150 полностью надутых шаров, а Аркадий, для верности, прицепил 400 полностью надутых шаров?

График зависимости атмосферного давления от высоты над уровнем море представлен на рисунке.



Возможное решение:

- 1) Условие отрыва от поверхности земли – равенство сил тяжести и Архимеда:

$N_1 \rho V_{\text{ш}} g + mg = N_1 \rho_{\text{в}}(0) V_{\text{ш}} g$, где N_1 – минимальное количество шаров, $\rho_{\text{в}}(0)$ – плотность воздуха у поверхности земли, m – масса домика Аркадия.

- 2) Плотность воздуха будет убывать так же, как и атмосферное давление. Причём на определённой высоте $\rho_{\text{в}} = \alpha p_{\text{а}}$, где α – одинаковый коэффициент пропорциональности, а $\rho_{\text{в}}$ и $p_{\text{а}}$ – плотность и давление атмосферы на одной и той же высоте. Это значит, что данный в задаче график с точностью до константы α можно считать графиком зависимости плотности атмосферного воздуха от высоты.

- 3) Условие равновесия на высоте h :

$$N_2 \rho V_{\text{ш}} g + mg = N_2 \rho_{\text{в}}(h) V_{\text{ш}} g, \text{ где } N_2 = 400$$

- 4) Из п. 1 и 4 получаем:

$$(N_2 - N_1)\rho V_{\text{ш}}g = N_2\rho_{\text{в}}(h)V_{\text{ш}}g - N_1\rho_{\text{в}}(0)V_{\text{ш}}g \Rightarrow \rho_{\text{в}}(h) = \frac{(N_2 - N_1)\rho V_{\text{ш}}g + N_1\rho_{\text{в}}(0)V_{\text{ш}}g}{N_2V_{\text{ш}}g}$$

5) Высоту можно найти по графику, выразив давление

$$p_{\text{а}}(h) = \alpha\rho_{\text{в}}(h) = \frac{p_{\text{а}}(0)}{\rho_{\text{в}}(0)} \frac{(N_2 - N_1)\rho V_{\text{ш}}g + N_1\rho_{\text{в}}(0)V_{\text{ш}}g}{N_2V_{\text{ш}}g} = 330 \text{ мм рт. ст.} \Rightarrow$$

6) Высота по графику примерно равна $h = 6,25 \text{ км}$

Система оценивания задачи:

Написано условие отрыва из п.1 – **2 балла**

Выражен коэффициент $\alpha = \frac{p_{\text{а}}(0)}{\rho_{\text{в}}(0)}$ – **2 балла**

Написано условие равновесия на высоте h – **2 балла**

Получено $p_{\text{а}}(h)$ – **2 балла**

По графику найдена h – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов