

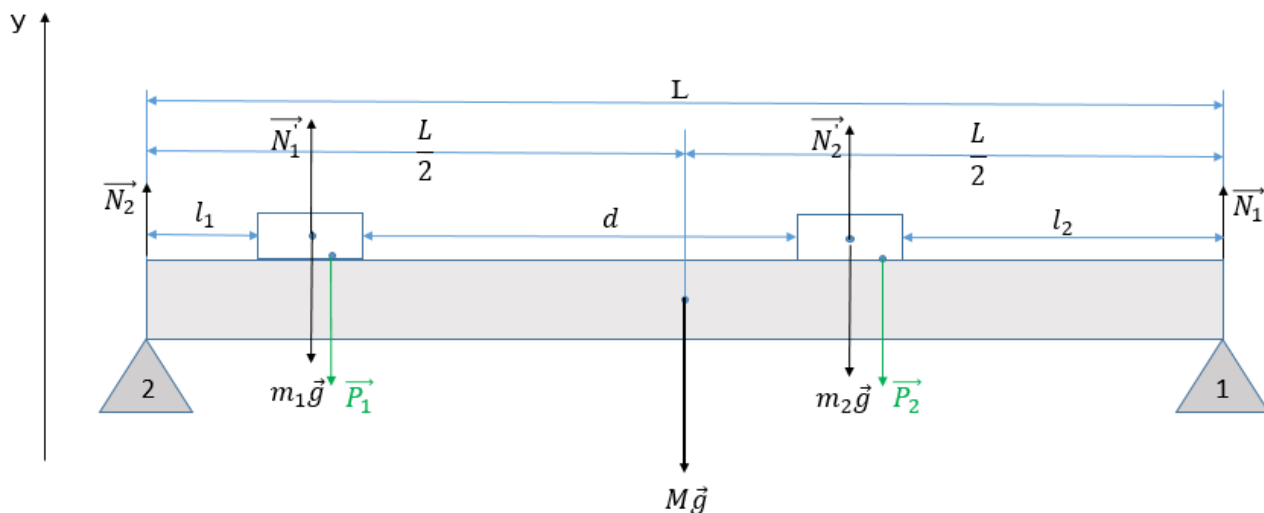
8 класс

Задача 1.

У Окского моста в Рязани имеются два судоходных пролета длиной 80 метров каждый. Из Рязани в сторону Солотчи едут два грузовика массами $m_1 = 10$ т и $m_2 = 12$ т, соблюдая дистанцию 40 метров друг от друга. Масса пролётного строения (плиты, которая перекрывает расстояние между опорами) 1200 тонн. Определите с какой силой пролётное строение давит на каждую опору в момент, когда второй грузовик окажется на расстоянии 30 метров от первой опоры? Сделайте рисунок, поясняющий решение с указанием всех сил, действующих на грузовики и пролётное строение моста. Считать, что других автомобилей на мосту нет, плита прямая, влияние соседних пролётных строений не учитывать. Ускорение свободного падения примите равным $g = 9,8$ м/с²

Решение:

Будем рассматривать мост как балку, которая поддерживается по краям пролета двумя опорами 1 и 2.



$M = F \cdot l$ – момент силы.

O – ось вращения

$$P_1 = N_1' = m_1 g, \quad P_2 = N_2' = m_2 g$$

$$l_1 = L - d - l_2 = 80 - 40 - 30 = 10 \text{ м}$$

Запишем условия равновесия для твердого тела (сумму сил и сумму моментов сил):

$$N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g - Mg = 0 \quad (1)$$

$$N_2 L - m_1 g(d + l_2) - m_2 g l_2 - Mg \frac{L}{2} = 0 \quad (2)$$

Пользуясь уравнением (2) рассчитаем силу реакции на 2 опору моста:

$$N_2 = \frac{m_1 g(d + l_2) + m_2 g l_2 + Mg \frac{L}{2}}{L} = \frac{g(m_1(d + l_2) + m_2 l_2 + M \frac{L}{2})}{L}$$

$$N_2 = \frac{9,8(1 \cdot 10^4 \cdot (40 + 30) + 12 \cdot 10^3 \cdot 30 + 12 \cdot 10^5 \cdot \frac{80}{2})}{80} = 6009850 \text{ Н} \approx 6,01 \text{ МН}$$

Пользуясь уравнением (1) рассчитаем силу реакции на 1 опору моста:

$$N_1 = m_1 g + m_2 g + Mg - N_2 = g(m_1 + m_2 + M) - N_2$$

$$N_1 = 9,8 \left(1 \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^5 \right) - 6009850 = 5965750 \text{ Н} \approx 5,97 \text{ МН}$$

Критерии оценивания

Выполнен рисунок с указанием всех сил, действующих на грузовики и пролетное строение моста	2
Записано уравнение 1	2
Записано уравнение 2	2
Записана формула и рассчитано значение N_1 – сила реакции на 1 опору	2
Записана формула и рассчитано значение N_2 – сила реакции на 2 опору	2
ИТОГО	10

Задача 2.

Во время ремонта на кухне папа установил смеситель с двумя одинаковыми кранами. Его сын восьмиклассник нашел в интернете очень серьезную документацию к этой модели и изучив её узнал, что количество воды, протекающей через каждый кран за единицу времени, прямо пропорционально углу его поворота при открывании. Воспользовавшись измерительными приборами, он определил следующее: если повернуть кран с холодной водой на угол $\alpha_1 = 180^\circ$, а кран с горячей – на угол $\beta_1 = 60^\circ$, потечет вода температурой $t_1 = 36^\circ\text{C}$. Если же повернуть холодный кран на угол $\alpha_2 = 120^\circ$, а горячий кран – на угол $\beta_2 = 90^\circ$, то потечет вода температурой $t_2 = 48^\circ\text{C}$. Найдите температуру воды, при повороте холодного крана на угол $\alpha_3 = 160^\circ$, а горячего – на угол $\beta_3 = 80^\circ$.

Решение:

Количество воды, протекающей через каждый кран, пропорционально углу поворота крана.

Пусть $m_x = k\alpha$, $m_\Gamma = k\beta$. (Не считать ошибкой и не снижать баллы, если записаны пропорциональности для объемов $V_x = k\alpha$, $V_\Gamma = k\beta$).

$$Q_{\text{отдано}} = Q_{\text{получено}}$$

$$Q_{\text{отдано}} = cm_\Gamma(t_\Gamma - t_{\text{смеси}})$$

$$Q_{\text{получено}} = cm_x(t_{\text{смеси}} - t_x)$$

$$cm_\Gamma(t_\Gamma - t_{\text{смеси}}) = cm_x(t_{\text{смеси}} - t_x)$$

$$m_\Gamma(t_\Gamma - t_{\text{смеси}}) = m_x(t_{\text{смеси}} - t_x)$$

$$m_\Gamma \cdot t_\Gamma - m_\Gamma \cdot t_{\text{смеси}} = m_x \cdot t_{\text{смеси}} - m_x \cdot t_x$$

$$m_x \cdot t_{\text{смеси}} + m_\Gamma \cdot t_{\text{смеси}} = m_\Gamma \cdot t_\Gamma + m_x \cdot t_x$$

$$(m_x + m_\Gamma)t_{\text{смеси}} = m_\Gamma \cdot t_\Gamma + m_x \cdot t_x$$

$$t_{\text{смеси}} = \frac{m_\Gamma \cdot t_\Gamma + m_x \cdot t_x}{m_x + m_\Gamma} = \frac{k\beta \cdot t_\Gamma + k\alpha \cdot t_x}{k\alpha + k\beta} = \frac{\beta \cdot t_\Gamma + \alpha \cdot t_x}{\alpha + \beta} \quad (1)$$

Подставим данные в формулу (1) и рассчитаем температуру смеси горячей и холодной воды для двух случаев, описанных в условии задачи.

1 случай:

$$36 = \frac{60 \cdot t_\Gamma + 180 \cdot t_x}{180 + 60}$$

$$36 = \frac{60 \cdot t_\Gamma + 180 \cdot t_x}{240}$$

$$8640 = 60 \cdot t_\Gamma + 180 \cdot t_x \quad /60$$

$$144 = t_\Gamma + 3 \cdot t_x$$

$$t_\Gamma = 144 - 3 \cdot t_x$$

2 случай:

$$48 = \frac{90 \cdot t_\Gamma + 120 \cdot t_x}{120 + 90}$$

$$48 = \frac{90 \cdot t_\Gamma + 120 \cdot t_x}{210}$$

$$10080 = 90 \cdot t_\Gamma + 120 \cdot t_x \quad /10$$

$$1008 = 9 \cdot t_\Gamma + 12 \cdot t_x$$

Во втором уравнении заменим t_2 :

$$1008 = 9 \cdot (144 - 3 \cdot t_x) + 12 \cdot t_x$$

$$1008 = 1296 - 27 \cdot t_x + 12 \cdot t_x$$

$$15 \cdot t_x = 288$$

$$t_x = 19,2^\circ\text{C}$$

Тогда $t_\Gamma = 144 - 3 \cdot t_x = 144 - 3 \cdot 19,2 = 86,4^\circ\text{C}$.

Когда известны все параметры, возможно рассчитать $t_{\text{смеси}}$ для третьего случая по формуле (1).

$$t_{\text{смеси}} = \frac{\beta \cdot t_\Gamma + \alpha \cdot t_x}{\alpha + \beta} = \frac{80 \cdot 86,4 + 160 \cdot 19,2}{160 + 80} = 41,6^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение теплового баланса	1
Выведена формула для определения $t_{\text{смеси}}$ (1)	2
Определено значение температуры холодной воды $t_x=19,2^{\circ}\text{C}$	3
Определено значение температуры горячей воды $t_r = 86,4^{\circ}\text{C}$	2
Рассчитана температура смеси для третьего случая с α_3 и β_3	2
ИТОГО	10

Задача 3.

Металлическая однородная прямая призма массой $m = 0,5$ кг в основании имеет квадрат. Если поставить призму на горизонтальную поверхность основанием, то она будет оказывать давление $p_1 = 0,5$ кПа, а если боковой гранью, то давление будет $p_2 = 3750$ Па. Определите плотность материала призмы. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с². (Объем призмы рассчитывается произведением площади основания призмы на ее высоту).

Решение:

Объем призмы рассчитывается произведением площади основания призмы на ее высоту: $V = S_0 h$, $S_0 = a^2$, где V – объем призмы, h – высота призмы, S_0 – площадь основания призмы, a – сторона квадрата в основании призмы.

На горизонтальную поверхность призма оказывает давление:

$$P = \frac{F}{S}, \text{ где } F = mg \rightarrow P = \frac{mg}{S}$$

Если поставить призму на горизонтальную поверхность основанием, то

$$P_1 = \frac{mg}{S_0} = \frac{mg}{a^2} \rightarrow a^2 = \frac{mg}{P_1} \rightarrow a = \sqrt{\frac{mg}{P_1}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 10}{500}} = 0,1 \text{ м} - \text{сторона квадрата в основании призмы.}$$

Если поставить призму на боковую грань, то

$$P_2 = \frac{mg}{S_{\Gamma}} = \frac{mg}{a \cdot h} \rightarrow h = \frac{mg}{a \cdot P_2} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,1 \cdot 3750} \approx 0,0133 \text{ м} - \text{высота призмы.}$$

Плотность материала призмы определим по формуле:

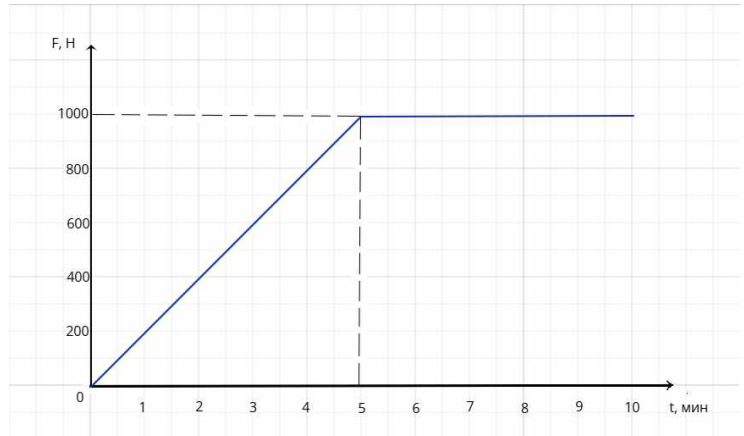
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S_0 h} = \frac{m}{a^2 \cdot h} = \frac{0,5}{0,1^2 \cdot 0,0133} = 3750 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Критерии оценивания

Записана формула для расчета давления на поверхность	1
Определена сторона квадрата в основании призмы	2
Определена высота призмы	3
Записана формула для расчета плотности материала призмы	1
Определена плотность материала призмы (формула и правильный численный ответ)	3
ИТОГО	10

Задача 4.

Во дворе дома трактор управляющей компании чистит снег. График зависимости силы тяги трактора от времени представлен на рисунке. Время его работы составляет 10 минут. Трактор движется с постоянной скоростью $v = 2,5$ м/с. Мощность двигателя трактора во время движения изменяется.



Коэффициент полезного действия двигателя составляет $\eta = 25\%$. Плотность топлива, которое использует трактор, равна $\rho = 0,85$ кг/л, а удельная теплота сгорания этого топлива $q = 42$ МДж/кг.

1. Определите работу, которую выполнил трактор при очистке двора.
2. Определите среднюю мощность трактора за весь период работы.
3. Определите количество топлива, которое затратил трактор за время работы.
4. Если из-за препятствий трактору придется двигаться более осторожно и сбавить скорость до 1 м/с на 200 секунд при постоянной силе тяги 1000 Н, как изменится общая работа и затраты топлива?

Решение:

Из графика зависимости силы тяги трактора от времени видно, что сила тяги изменяется линейно. График состоит из двух отрезков. На первом участке сила тяги линейно увеличивается от $F_1 = 0$ Н до $F_2 = 1000$ Н за 5 минут, а на втором участке сила тяги постоянна и составляет $F_3 = 1000$ Н за 5 минут.

1. Определим работу, которую выполнил трактор при очистке двора.

$$A = F \cdot S$$

На первом участке:

$$F_{\text{ср}} = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{0 + 1000}{2} = 500 \text{ Н}$$

$$5 \text{ мин} = 300 \text{ с} \rightarrow S_1 = v \cdot t_1 = 2,5 \cdot 300 = 750 \text{ м}$$

$$A_1 = F_{\text{ср}} \cdot S_1 = 500 \cdot 750 = 375000 \text{ Дж} = 375 \text{ кДж}$$

На втором участке:

$$5 \text{ мин} = 300 \text{ с} \rightarrow S_2 = v \cdot t_2 = 2,5 \cdot 300 = 750 \text{ м}$$

$$A_2 = F_3 \cdot S_2 = 1000 \cdot 750 = 750000 \text{ Дж} = 750 \text{ кДж}$$

Таким образом, общая работа, выполненная трактором:

$$A = A_1 + A_2 = 375000 + 750000 = 1125000 \text{ Дж} = 1125 \text{ кДж}$$

2. Определим среднюю мощность трактора за весь период работы (за 10 минут = 600 с).

$$P = \frac{A}{t} = \frac{1125000}{600} = 1875 \text{ Вт} \approx 1,9 \text{ кВт}$$

3. Определим количество топлива, которое затратил трактор за время работы (за 10 минут = 600 с). Можно определить либо массу, либо объем топлива.

$$\eta = \frac{A_{\text{полезное}}}{A_{\text{затраченное}}} \cdot 100\% \text{ , где } A_{\text{полезное}} = A, \text{ а } A_{\text{затраченное}} = Q = q \cdot m$$

$$\eta = \frac{A}{q \cdot m} \rightarrow m = \frac{A}{q \cdot \eta} = \frac{1125000}{42 \cdot 10^6 \cdot 0,25} \approx 0,11 \text{ кг}$$

$$\text{или } V = \frac{m}{\rho} = \frac{0,11}{850} \approx 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 \approx 0,126 \text{ л}$$

4. Определим, как изменится общая работа и затраты топлива если трактору придется двигаться более осторожно и сбавить скорость до 1 м/с на 200 секунд при постоянной силе тяги 1000Н.

$$A' = F \cdot S', \text{ где } S' = v \cdot t = 1 \cdot 200 = 200 \text{ м},$$

$$\text{тогда } A' = 1000 \cdot 200 = 200000 \text{ Дж} = 200 \text{ кДж}$$

$$\text{Изменение общей работы: } A_{\text{изм}} = 1125 - 750 + 200 = 575 \text{ кДж.}$$

Энергия необходимая двигателю при таком изменении:

$$E = \frac{A_{\text{изм}}}{\eta} = \frac{575000}{0,25} = 2300000 \text{ Дж} = 2,3 \text{ МДж.}$$

5. Рассчитаем количество топлива необходимое при таком движении (можно определить либо массу, либо объем топлива):

$$m_{\text{топлива}} = \frac{E}{q} = \frac{2300000}{42 \cdot 10^6} \approx 0,0548 \text{ кг}$$

или

$$V_{\text{топлива}} = \frac{m_{\text{топлива}}}{\rho} = \frac{0,0548}{850} \approx 6,44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 \approx 0,064 \text{ л}$$

Критерии оценивания

Определена работа, которую выполнил трактор при очистке двора	2
Определена средняя мощность трактора за весь период работы	2
Определено количество топлива, которое затратил трактор за время работы	2
Определена работа трактора при снижении скорости	2
Определены затраты топлива (количество топлива) при снижении скорости	2
ИТОГО	10