

8.1. На гоночном треке в виде большой окружности боксы команд А и В расположены в диаметрально противоположных точках трека. Из боксов по треку навстречу друг другу выезжают две машины, причем каждая движется по треку с постоянной скоростью. Первая их встреча произошла на расстоянии $L_1 = 300$ м от бокса команды А (расстояние измеряется по трассе трека). Проехав мимо друг друга, они продолжают движение, и следующая их встреча состоялась на расстоянии $L_2 = 180$ м от бокса команды В. Определите возможную длину трека L .

Решение.

Вариант 1.

Заметим, что от начала движения к моменту первой встречи обе машины суммарно прошли расстояние $L/2$, а ко второй – $3L/2$. Поскольку промежутки времени одинаковы для обеих машин, то каждая из них к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} + L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} + L_2 = 3L_1; \quad (1)$$

$$L = 2(3L_1 - L_2). \quad (2)$$

Возможная длина трека – 1440 м.

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (3)$$

$$L = 2(3L_1 + L_2). \quad (4)$$

Возможная длина трека – 2160 м.

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1 , а до второй – $\frac{3L}{2} - L_2$. Отсюда:

$$\frac{3L}{2} - L_2 = 3L_1; \quad (5)$$

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2. \quad (6)$$

Возможная длина трека – 720 м.

Примечание: распространенная ошибка – расстояние L до момента второй встречи.

Разбалловка варианта 1

№	Критерий	Баллы
1	Определено суммарное расстояние $L/2$ до 1-й встречи.	1
2	Определено суммарное расстояние $3L/2$ до 2-й встречи При значении L за этот пункт и за числовой ответ для длин трека (п. 6, 8, 10) ставим 0 баллов, за остальные пункты при правильной логике решения баллы не снимаем (итого 6 баллов за задачу).	1
3	Получен вывод, что каждая из машин к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.	1
4	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
5	Рассмотрен случай (А)	1
6	Получена длина трека 1440 м	1
7	Рассмотрен случай (Б)	1
8	Получена длина трека 2160 м	1
9	Рассмотрен случай (В)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

Вариант 2.

Пусть v_1 – скорость первой машины из бокса команды А, v_2 – скорость второй машины из бокса команды В, τ_1 – время от начала движения до первой встречи, τ_2 – до второй встречи.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1a)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2a)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} + L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3a)$$

$$L - L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4a)$$

Сложим уравнения (1a) и (2a):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5a)$$

Сложим уравнения (3a) и (4a):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6a)$$

Отсюда, разделив (6а) на (5а):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7a)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3а) на уравнение (1а):

$$\frac{\frac{L}{2} + L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8a)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 - L_2) = 1440 \text{ м.} \quad (9a)$$

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1б)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2б)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} - L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3б)$$

$$L + L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4б)$$

Сложим уравнения (1б) и (2б):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5б)$$

Сложим уравнения (3б) и (4б):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6б)$$

Отсюда, разделив (6б) на (5б):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7б)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3б) на уравнение (1б):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8б)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 + L_2) = 2160 \text{ м.} \quad (9б)$$

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Тогда для первой встречи:

$$L_1 = v_1 \tau_1; \quad (1в)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = v_2 \tau_1; \quad (2в)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{3L}{2} - L_2 = v_1 \tau_2; \quad (3в)$$

$$L_2 = v_2 \tau_2. \quad (4в)$$

Сложим уравнения (1в) и (2в):

$$\frac{L}{2} = v_1 \tau_1 + v_2 \tau_1 = (v_1 + v_2) \tau_1. \quad (5в)$$

Сложим уравнения (3в) и (4в):

$$\frac{3L}{2} = v_1 \tau_2 + v_2 \tau_2 = (v_1 + v_2) \tau_2. \quad (6в)$$

Отсюда, разделив (6в) на (5в):

$$\tau_2 = 3\tau_1. \quad (7в)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3в) на уравнение (1в):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 3. \quad (8в)$$

Отсюда

$$L = \frac{2}{3}(3L_1 + L_2) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2 = 720 \text{ м.} \quad (9в)$$

Разбалловка варианта 2

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
2	Для случая (А) записаны уравнения (1а)-(4а)	1
3	Записано уравнение (8а)	1
4	Получена длина трека 1440 м	1
5	Для случая (Б) записаны уравнения (1б)-(4б)	1
6	Записано уравнение (8б)	1
7	Получена длина трека 2160 м	1
8	Для случая (В) записаны уравнения (1в)-(4в)	1
9	Записано уравнение (8в)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	10

8.2. Однородный брусок в виде параллелепипеда из материала с плотностью ρ и размерами $a \times b \times b$ ($b < a$) стоит квадратной гранью на дне большого аквариума, в который до уровня h налита вода ($h < a$, $\rho_в < \rho$, где $\rho_в$ – плотность воды). Какую минимальную силу надо приложить к бруску, чтобы он начал наклоняться, вращаясь относительно нижнего ребра? Брусок по дну аквариума не скользит. Ускорение свободного падения равно g .

Решение.

Искомая сила будет минимальной, если приложить ее **перпендикулярно** плечу максимально возможной длины, которым в данном случае является диагональ боковой грани бруска.

В начальной стадии вращения (как только нижняя грань оторвалась от дна аквариума) на брусок действуют следующие силы:

- приложенная перпендикулярно к верхнему ребру и диагонали грани $a \times b$ искомая сила F ;

- приложенная к центру масс сила тяжести mg ;

- приложенная к центру плавания сила Архимеда F_A ;

- приложенная к нижнему ребру вертикально вверх сила реакции опоры N .

Запишем уравнение моментов сил относительно точки опоры (тогда момент силы реакции опоры равен 0):

$$F \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = mg \cdot \frac{b}{2} - F_A \cdot \frac{b}{2}. \quad (1)$$

Сила Архимеда равна:

$$F_A = \rho_в g \cdot V_{погр} = \rho_в g \cdot hb^2. \quad (2)$$

Масса бруска равна:

$$m = \rho V = \rho a \cdot b^2. \quad (3)$$

Отсюда получаем:

$$F = \frac{gb^3(\rho a - \rho_в h)}{2\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Примечание:

Если школьник направляет силу F параллельно верхней грани бруска, уравнение моментов силы будет выглядеть как:

$$F \cdot a = mg \cdot \frac{b}{2} - F_A \cdot \frac{b}{2}. \quad (1)$$

Получаемый ответ:

$$F = \frac{gb^3(\rho a - \rho_в h)}{2a}. \quad (4)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Обоснована минимальность прилагаемой силы (перпендикулярно диагонали грани). При обосновании направления силы параллельно верхней грани за этот пункт ставим 0 баллов, за остальные пункты (при правильном решении) баллы не снимаем.	3

2	Записано уравнение моментов сил (1), с правильным указанием точек приложения сил.	3
3	Записано выражение (2) для силы Архимеда	1
4	Записано выражение (3) для массы бруска (или для силы тяжести бруска)	1
5	Получен ответ (4)	2
	Сумма	10

8.3. Средняя плотность свинцового шара и железного куба равна $\rho_1 = 8,9 \text{ г/см}^3$. Чему будет равна средняя плотность ρ_2 железного шара и свинцового куба тех же размеров? Чему равно отношение объемов шара и куба? Плотность свинца $\rho_c = 11,4 \text{ г/см}^3$, плотность железа $\rho_{ж} = 7,8 \text{ г/см}^3$.

Решение.

Пусть V_1 и V_2 – объемы шара и куба соответственно.

Обозначим $\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, тогда $1 - \alpha = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$.

Средняя плотность свинцового шара и железного куба:

$$\rho_1 = \frac{\rho_c V_1 + \rho_{ж} V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_c + (1 - \alpha) \rho_{ж}. \quad (1)$$

Раскроем скобки:

$$\rho_1 = \alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_{ж}. \quad (2)$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}. \quad (3)$$

Средняя плотность свинцового куба и железного шара:

$$\rho_2 = \frac{\rho_{ж} V_1 + \rho_c V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_{ж} + (1 - \alpha) \rho_c = -\alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_c. \quad (4)$$

Сложим уравнения (2) и (4):

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_{ж} + \rho_c;$$

$$\rho_2 = \rho_{ж} + \rho_c - \rho_1 = 7,8 + 11,4 - 8,9 = 10,3 \text{ г/см}^3. \quad (5)$$

Отношение объемов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}}{1 - \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж} - (\rho_1 - \rho_{ж})} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_1} = \frac{8,9 - 7,8}{11,4 - 8,9} = 0,44 \quad (6)$$

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для средней плотности ρ_1	1
2	Записано выражение (3) для доли объема одной из фигур, или найдены объемы фигур.	3
3	Записано уравнение (4) для средней плотности ρ_2	1
4	Получено выражение (5) для средней плотности ρ_2	1
5	Получен ответ $\rho_2 = 10,3 \text{ г/см}^3$.	1
6	Получено выражение (6) для отношения объемов шара и куба	1
7	Получено значение 0,44 для отношения объемов шара и куба	1
	Сумма	10

8.4. Реактором идеального смешения называется закрытый сосуд с несколькими входными и одним выходным потоком, в котором происходит быстрое перемешивание вещества с достижением одинаковых значений давления и температуры в каждой точке объема сосуда. В такой реактор поступает 2 входных потока воды, с массовым расходом μ_1 и μ_2 , и температурой T_1 и T_2 соответственно. Какая равновесная температура T_x установится внутри реактора, если дополнительно внутри сосуда выделяется тепло мощностью P ? Удельная теплоемкость воды c . Количество воды в реакторе остается постоянным. *Примечание:* массовым расходом называется масса вещества, поступающего в поток в реактор в единицу времени.

Решение.

Поскольку вода не сжимается и её количество внутри реактора остается постоянным, то массовый расход вытекающей из реактора воды равен сумме массовых расходов втекающих потоков (аналог закона сохранения массы):

$$\mu_{\text{вых}} = \mu_1 + \mu_2. \quad (1)$$

В равновесии температура вытекающего потока равна температуре воды внутри реактора:

$$T_{\text{вых}} = T_x. \quad (2)$$

Тепловая энергия, которая поступает в реактор за малый промежуток времени $\Delta \tau$:

$$Q_{\text{вх}} = (c\mu_1 T_1 + c\mu_2 T_2) \cdot \Delta \tau. \quad (3)$$

Тепловая энергия, которая выделяется внутри реактора:

$$Q_{\text{выд}} = P \cdot \Delta \tau. \quad (4)$$

Тепловая энергия, которая уходит из реактора:

$$Q_{\text{вых}} = c\mu_{\text{вых}} T_{\text{вых}} \cdot \Delta \tau = c(\mu_1 + \mu_2) T_x \cdot \Delta \tau. \quad (5)$$

В равновесии сохраняется тепловой баланс:

$$Q_{\text{ex}} + Q_{\text{выд}} = Q_{\text{вых}}; \quad (6)$$

$$(c\mu_1 T_1 + c\mu_2 T_2) \cdot \Delta\tau + P \cdot \Delta\tau = c(\mu_1 + \mu_2) T_x \cdot \Delta\tau;$$

Отсюда получаем:

$$T_x = \frac{\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \frac{P}{c}}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (7)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Отмечено, что массовый расход вытекающей из реактора воды равен сумме массовых расходов втекающих потоков	2
2	Отмечено, что в равновесии температура вытекающего потока равна температуре воды в реакторе.	2
3	Записаны уравнения (3)-(5) для тепловой энергии входного потока, выделяющейся в реакторе и выходного потока (возможно, в одном уравнении)	3
4	Записано уравнение (6) для теплового баланса	2
5	Получен ответ (7)	1
	Сумма	10