

9.1. Равномерно или ускоренно? (Рубцов Д.) Внешний диаметр скотча при разматывании уменьшается с постоянной скоростью $D(t) = D_0 - ut$. Как зависит от времени длина размотанной части скотча $x(t)$? Явно выпишите параметры полученной зависимости $x(t)$, например, начальную скорость увеличения длины размотанной части v_0 и ускорение a (если оно постоянно), с которой эта скорость изменяется. Считайте известными начальный диаметр скотча D_0 , скорость u и толщину скотча h .

Решение.

Объем ленты скотча при разматывании не изменяется. Пусть внутренний диаметр скотча d , а ширина скотча l . Тогда начальный объем скотча $V = \frac{\pi(D_0^2 - d^2)}{4} l$. В произвольный момент времени после разматывания объем скотча $V = \frac{\pi((D_0 - ut)^2 - d^2)}{4} l + x(t)hl$. Из равенства объемов следует

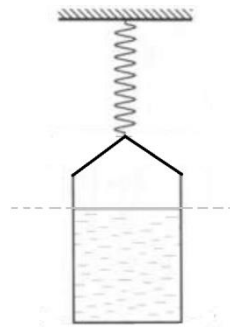
$$x(t) = \frac{\pi D_0 u}{2h} t - \frac{\pi u^2}{2h} \frac{t^2}{2} = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Таким образом, начальная длина размотанной части скотча увеличивается со скоростью $v_0 = \frac{\pi D_0 u}{2h}$. Эта скорость, в свое время, по ходу движения уменьшается со скоростью $a = \frac{\pi u^2}{2h}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Идея сохранения объемов	2 балла
2	Начальный объем $\frac{\pi(D_0^2 - d^2)}{4} l$ или $\frac{\pi D_0^2}{4} l$	1 балл
3	Объем рулона в произвольный момент времени $\frac{\pi((D_0 - ut)^2 - d^2)}{4} l$ или $\frac{\pi(D_0 - ut)^2}{4} l$	1 балл
4	Объем размотанной части скотча в произвольный момент времени $x(t)hl$	1 балл
5	$x(t) = \frac{\pi D_0 u}{2h} t - \frac{\pi u^2}{2h} \frac{t^2}{2}$	2 балла
6	$v_0 = \frac{\pi D_0 u}{2h}$	1 балл
7	$a = \frac{\pi u^2}{2h} \text{ или } a = -\frac{\pi u^2}{2h}$	2 балла

9.2. Это уровень! (Рубцов Д.) На пружине висит цилиндрический сосуд с водой. Когда в сосуд начали медленно доливать воду, поверхность воды в сосуде оставалась относительно земли на прежнем уровне. Площадь внутреннего сечения сосуда S , плотность воды ρ , ускорение свободного падения g . Вода из сосуда не выливается. Определите:



- коэффициент жесткости пружины k ;
- скорость нижнего конца пружины v_0 , если воду в сосуд доливали с массовым расходом μ ;
- во сколько раз средняя точка пружины движется медленнее, чем нижняя точка.

Решение:

Пусть в сосуд добавили порцию воды массой Δm и объемом $\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$. Тогда уровень воды в сосуде относительно его дна увеличился на $\Delta y = \frac{\Delta V}{S} = \frac{\Delta m}{\rho S}$.

Сосуд находится в равновесии, так как сила упругости пружины компенсирует силу тяжести $F_{\text{упр}} = mg$. Тогда изменение силы тяжести Δmg равно изменению силы упругости $k\Delta x$, то есть при добавлении в сосуд порции воды массой Δm нижняя точка пружины опускается на $\Delta x = \frac{\Delta mg}{k}$.

Так как поверхность воды в сосуде оставалась относительно земли на прежнем уровне, то $\Delta x = \Delta y$. Так что коэффициент жесткости $k = \rho g S$.

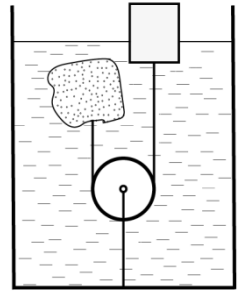
Из полученной ранее формулы $\Delta x = \frac{\Delta mg}{k}$ при подстановке $\Delta x = v_0 \Delta t$ и $\Delta m = \mu \Delta t$ следует ответ на второй вопрос задачи $v_0 = \frac{\mu g}{k} = \frac{\mu}{\rho S}$.

Средняя точка пружины всегда находится посередине между неподвижной верхней точкой пружины и нижней точкой, так что ее скорость всегда в 2 раза меньше, чем у нижней точки.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Связь массы и объема $\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$	0,5 балла
2	Связь объема и изменения уровня $\Delta y = \frac{\Delta V}{S}$	0,5 балла
3	Условие равновесия $F_{\text{упр}} = mg$	0,5 балла
4	Продемонстрировано знание закона Гука	0,5 балла
5	Условие $\Delta x = \Delta y$ или аналогичное	1 балл
6	Ответ $k = \rho g S$	2 балла
7	Связь $\Delta x = v_0 \Delta t$	0,5 балла
8	Связь $\Delta m = \mu \Delta t$	0,5 балла
9	Ответ $v_0 = \frac{\mu}{\rho S}$	2 балла
10	Ответ: скорость средней точки в два раза меньше	1 балл
11	Обоснование: средняя точка посередине	1 балл

9.3. Блок (Рубцов Д.). В цилиндрическом стакане с площадью основания $S = 10 \text{ см}^2$ в воде плавают кусок льда и кусок пластика, соединенные легкой нитью, перекинутой через блок, прикрепленный нитью ко дну. Кусок пластика, кусок льда и блок имеют одинаковые объемы $V = 10 \text{ см}^3$. Плотность воды $\rho_v = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность льда $\rho_l = 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Определите:



- плотность пластика ρ_p , если система первоначально находится в равновесии, а пластик погружен наполовину своего объема;
- какую максимальную плотность ρ может иметь блок, чтобы всё ещё плавать?
- насколько и в какую сторону изменится уровень воды в стакане после того, как лед растает (рассмотреть для всех возможных плотностей блока)?

Решение:

На лед действуют сила Архимеда $\rho_v g V$, сила тяжести $\rho_l g V$ и сила натяжения нити T . На пластик действует в два раза меньшая сила Архимеда ($\rho_v g V / 2$), так как он погружен наполовину своего объема, и сила тяжести $\rho_p g V$. На блок действуют две силы натяжения нити T , собственная сила тяжести $\rho g V$, сила Архимеда $\rho_v g V$ и сила натяжения нижней нити T_0 . Условия равновесия тел: $T + \rho_l g V = \rho_v g V$, $T + \rho_p g V = \frac{\rho_v g V}{2}$, $2T + \rho_v g V = \rho g V + T_0$. Получаем, что плотность пластика равна $\rho_p = \rho_l - \frac{\rho_v}{2} = 400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Плотность блока не может превосходить той, при которой он еще находится в равновесии, а сила натяжения нижней нити T_0 обращается в ноль. Получим, что максимальная плотность блока $\rho = 3\rho_v - 2\rho_l = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Уровень изменится за счет уменьшения объема льда(который стал водой) $\Delta V_1 = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} V$ и

за счет уменьшения объема погруженной части пластика $\Delta V_2 = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\rho_l - \rho_v}{2} \right) \right) V =$

$\frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} V$. Блок либо останется плавать (из-за нижней нити), либо упадет на дно сосуда, В

любом случае, на изменение уровня воды это не повлияет. Уменьшение уровня воды

$$\Delta h = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{S} = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} \frac{2V}{S} = 0,2 \text{ см.}$$

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Расстановка сил для льда	0,5
2	Для пластика	0,5
3	Для блока	0,5
4	Условие равновесия для льда	0,5
5	Для пластика	0,5
6	Для блока	0,5
7	Плотность пластика $\rho_p = \rho_l - \frac{\rho_v}{2}$	1,0
8	Численное значение для плотности $\rho_p = 400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	0,5

9	Условие максимальности плотности блока	0,5
10	Ответ для плотности блока $\rho = 3\rho_{\text{в}} - 2\rho_{\text{л}}$	1,0
11	Численное значение $\rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	0,5
12	Выражение для изменения объема льда	0,5
13	Выражение для объема погруженной части пластика	0,5
14	Явно написано, что ответ не зависит от плотности блока	0,5
15	Уровень воды уменьшится	0,5
16	Ответ для изменения высоты $\Delta h = \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} \frac{2V}{S}$	1,0
17	Численным значением $\Delta h = 0,2 \text{ см}$	0,5

9.4. Тепловые скорости (фольклор) В калориметр помещают два тела равной массы с температурами $t_1 = 60^\circ\text{C}$ и $t_2 = 0^\circ\text{C}$ соответственно. Вначале горячее тело остывает со скоростью $\gamma_1 = 1 \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$, а холодное – нагревается со скоростью $\gamma_2 = 2 \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$. Определите:

- отношение удельных теплоемкостей тел c_1/c_2 ;
- температуру тел t после завершения теплообмена.

Решение.

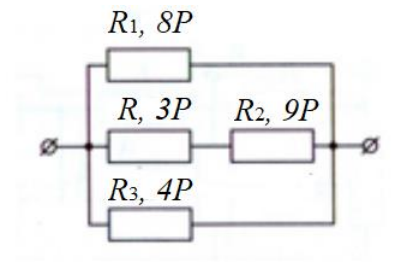
За небольшое время Δt первое тело остыло на $\gamma_1 \Delta t$ градусов Цельсия, а второе тело нагрелось на $\gamma_2 \Delta t$ градусов Цельсия. Уравнение теплового баланса $c_1 m \gamma_1 \Delta t = c_2 m \gamma_2 \Delta t$, откуда $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$.

Уравнение теплового баланса $c_1 m (t_1 - t) = c_2 m (t - t_2)$. С учетом $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$ получим
искомый ответ $t = \frac{\gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{2t_1 + t_2}{3} = 40^\circ\text{C}$.

Критерии оценивания (10 баллов)

1	Малое изменение температуры выражено через малое изменение времени $\Delta t = \gamma \Delta \tau$	1 балл
2	Уравнение теплового баланса для небольшого времени остывания $c_1 m \gamma_1 \Delta \tau = c_2 m \gamma_2 \Delta \tau$	3 балла
3	$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2$	1 балл
4	$\frac{c_1}{c_2} = 2$	1 балл
5	Уравнение теплового баланса (нахождение конечной температуры) $c_1 m (t_1 - t) = c_2 m (t - t_2)$	2 балла
6	$t = \frac{\gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$	1 балл
7	$t = 40^\circ\text{C}$	1 балл

9.5. Разные мощности (Рубцов Д.). Считая известными соотношения между мощностями, выделяющимися на резисторах, а также одно из сопротивлений R , определите сопротивления остальных трех резисторов R_1, R_2, R_3 .



Решение:

Через резисторы R и R_2 текут токи одинаковой силы I . Выделяющиеся на них мощности $3P = I^2 R$ и $9P = I^2 R_2$. Тогда $R_2 = 3R$. Суммарное сопротивление средней ветви $R + R_2 = 4R$.

На всех трех ветвях падает одинаковое напряжение U . Выделяющиеся мощности на каждой ветви $8P = \frac{U^2}{R_1}$, $12P = \frac{U^2}{4R}$ и $4P = \frac{U^2}{R_3}$. Откуда $R_1 = 6R$ и $R_3 = 12R$.

Критерии оценивания (10 баллов)

Задачу можно решать различными способами. Приведем примерную схему оценивания

1	Продemonстрировано знание о том, что при последовательном соединении одинаковы силы тока, а при параллельном - напряжения	2 балла
2	Продemonстрированы знания формул мощности $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ (какие-нибудь, в зависимости от хода решения)	2 балла
3	$R_1 = 6R$	2 балла
4	$R_2 = 3R$	2 балла
5	$R_3 = 12R$	2 балла