

Ключи ответов

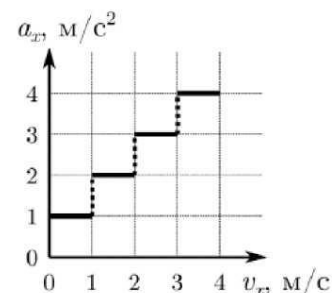
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

В исключительных случаях допускаются оценки, кратные 0,5 балла.

Максимальный балл за всю работу – 50.

Задача 1. Ступеньки

Материальная точка движется вдоль прямой Ox . Дан график зависимости проекции её ускорения от проекции скорости на эту же ось. Сколько секунд всего двигалась точка? Чему равен пройденный ею путь за всё время движения?



Решение

Согласно графику, на каждом из участков точка двигалась равноускоренно, при этом скорость в пределах каждого участка зависит от времени как $v(t) = v_0 + at$. Зная скорость v_n в начале каждого участка, и скорость v_k в его конце, можно найти время движения точки на каждом участке как $t_{yч} = (v_k - v_n) / a$. Тогда общее время движения

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \text{ с} \approx 2,08 \text{ с}.$$

Перемещение, совершаемое точкой на каждом участке, может быть найдено с помощью формулы

$$s_{yч} = \frac{v_k^2 - v_n^2}{2a}.$$

Тогда полное перемещение точки (и пройденный ею путь)

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{71}{24} \text{ м} \approx 2,96 \text{ м}.$$

№	Критерий	Значение	Балл
1	Указание на равноускоренный характер движения точки на каждом участке или использование этого факта при решении		2
2	Найдены времена движения на каждом участке, или приведена общая формула для нахождения времени движения на каждом участке	$t_{yч} = (v_k - v_n) / a$	2
3	Найдено общее время движения	$t = \frac{25}{12} \text{ с} \approx 2,08 \text{ с}$	2

4	Приведена формула, позволяющая определить перемещение на каждом участке	$s_{\text{уч}} = \frac{v_k^2 - v_n^2}{2a}$ или аналогичная	2
5	Найден общий пройденный путь	$s = \frac{71}{24} \text{ м} \approx 2,96 \text{ м.}$	2

Задача 2. Три состояния

В сосуд с негерметичной крышкой бросили кубик льда массой 24 г и налили спирт объемом $V_{\text{спирт}} = 250$ мл. Начальная температура спирта равна $t_1 = 1^\circ\text{C}$, а начальная температура льда равна $t_2 = -20^\circ\text{C}$. Какая температура будет достигнута при установлении теплового равновесия? Ответ дайте в градусах, округлив до целых.

В момент установления теплового равновесия в сосуде включили внешний нагреватель мощностью $P = 500$ Вт. Сколько времени пройдет с момента включения нагревателя прежде, чем все вещества в сосуде достигнут $t_k = 90^\circ\text{C}$? Ответ дайте в минутах.

Дополнительные сведения:

плотность спирта $\rho_{\text{спирт}} = 800 \text{ кг/м}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{лед}} = 340 \text{ кДж/кг}$, удельная теплота парообразования спирта $L_{\text{спирт}} = 850 \text{ кДж/кг}$, удельные теплоёмкости: спирта $c_{\text{спирт}} = 2400 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$, воды $c_{\text{вода}} = 4200 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$, льда $c_{\text{лед}} = 2110 \text{ Дж/(кг}^\circ\text{C)}$.

Известно, что спирт испаряется при $t_{\text{исп.спирт}} = 80^\circ\text{C}$, а вода испаряется при $t_{\text{исп.воды}} = 100^\circ\text{C}$. Теплообменом между стенками сосуда и внешней средой пренебречь, энергия идёт только на нагрев веществ в сосуде. Смешиванием веществ пренебречь.

Решение. 1. Условие теплового равновесия для спирта и кубика льда: $Q_{\text{спирт}} + Q_{\text{лед}} = 0$

$$c_{\text{лед}}m_{\text{лед}}(t_{\text{равн}} - t_2) + c_{\text{спирт}}m_{\text{спирт}}(t_{\text{равн}} - t_1) = 0$$

Из выражения выше следует, что конечная температура равна:

$$t_{\text{равн}} = \frac{c_{\text{лед}}m_{\text{лед}}t_2 + c_{\text{спирт}}m_{\text{спирт}}t_1}{c_{\text{лед}}m_{\text{лед}} + c_{\text{спирт}}m_{\text{спирт}}}$$

После подстановки получаем: $t_{\text{равн}} = -1^\circ\text{C}$

Известно, что мощность равна $P = \frac{A}{T}$, а работа нагревателя равняется количеству теплоты, затраченному на нагревание веществ в сосуде, таким образом, $A = Q_{\text{общее}}$. Отсюда следует, что время за которое будет совершен нагрев всех веществ в сосуде до нужной температуры равняется $T = \frac{Q_{\text{общее}}}{P}$.

$$Q_{\text{общее}} = Q_{\text{нс}} + Q_{\text{нл}} + Q_{\text{плавл}} + Q_{\text{испс}} + Q_{\text{нв}}$$

— общая энергия затраченная на нагрев до 90°C

$$Q_{\text{нс}} = c_{\text{спирт}}m_{\text{спирт}}(t_{\text{исп. спирта}} - t_{\text{рав}}) = 38880 \text{ Дж} — \text{нагрев спирта до } 80^\circ\text{C} \quad (1)$$

$$Q_{\text{нл}} = c_{\text{лед}}m_{\text{лед}}(t_{\text{плавл}} - t_{\text{рав}}) = 51 \text{ Дж} — \text{нагрев льда до } 0^\circ\text{C} \quad (2)$$

$$Q_{\text{плавл}} = \lambda_{\text{лед}}m_{\text{лед}} = 8160 \text{ Дж} — \text{плавление льда} \quad (3)$$

$$Q_{\text{исп}} = L_{\text{спирт}} m_{\text{спирт}} = 170000 \text{ Дж} — \text{испарение спирта} \quad (4)$$

$$Q_{\text{вода}} = c_{\text{вода}} m_{\text{лед}} (t_{\text{к}} - t_{\text{рав}}) = 9070 \text{ Дж} — \text{нагрев воды до } t_{\text{к}} = 90^{\circ}\text{C} \quad (5)$$

После вычисления, получаем, что энергия необходимая на нагрев всех веществ до 90°C равна: $Q_{\text{общее}} \approx 226\,000 \text{ Дж}$.

Рассчитаем сколько времени необходимо для подачи данного количества тепла с использованием источника тепла с мощностью $P = 500 \text{ Вт}$.

$$T = \frac{Q_{\text{общее}}}{P} = 453 \text{ с} \approx 7,5 \text{ мин}$$

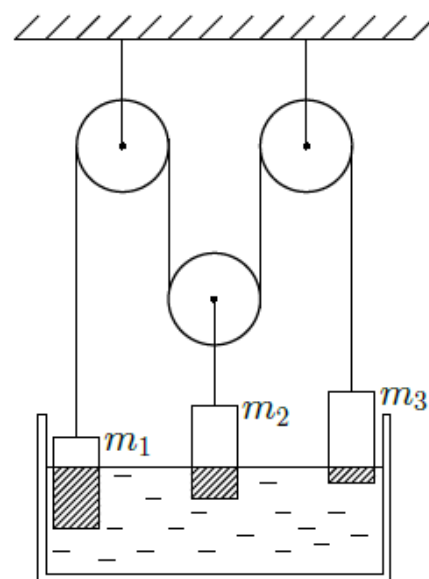
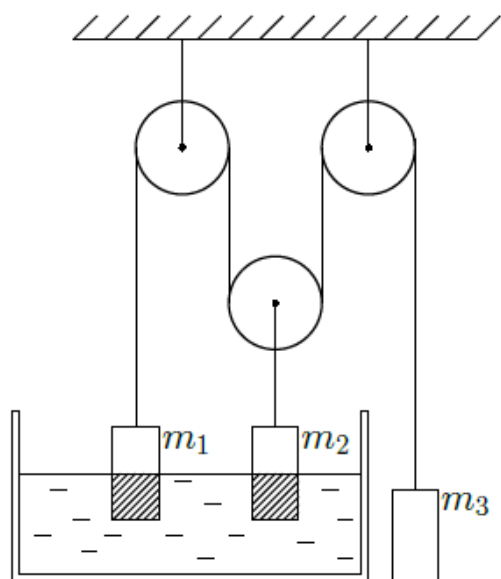
Ответ: 1) Температура равновесия в диапазоне: $t_{\text{равн}} = (-1 \pm 0,5)$; 2) Время нагревания в диапазоне $T = (7,5 \pm 0,5)$ минуты.

Критерии оценивания задачи №2. Три состояния

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записано условие теплового равновесия	$Q_{\text{спирт}} + Q_{\text{лед}} = 0$ или аналогичная формула	2
2	Выведена формула для получения конечной температуры при установлении теплового равновесия и/или верно посчитана температура теплового равновесия	$t_f = \frac{c_i m_i t_{0i} + c_c m_c t_{0c}}{c_i m_i + c_c m_c}$ (или аналогичная формула) и/или $t_{\text{равн}} = (-1 \pm 0,5)^{\circ}\text{C}$	2
3	Верно записаны формулы для расчета количества теплоты для всех веществ	Формулы (1)-(5) или аналогичные	2
4	Верно получена формула для вычисления полной энергии системы и/или верно посчитана полная энергия системы	$Q_{\text{общее}} = Q_{\text{спирт1}} + Q_{\text{спирт2}} + Q_{\text{льда1}} + Q_{\text{льда2}} + Q_{\text{льда2}}$ (или аналогичная формула) и/или $Q_{\text{общее}} \approx 226\,000 \text{ Дж}$.	2
5	Верно получена формула для вычисления времени нагрева системы и/или верно посчитано время нагрева системы до 90°C	$T = \frac{Q_{\text{общее}}}{P}$ и/или $T = (7,5 \pm 0,5)$ минуты	2

Задача 3. Блоки.

В системе из невесомых блоков на нерастяжимых нитях висят три груза с массами m_1 , m_2 , m_3 . Грузы имеют форму цилиндра и одинаковый объём. Система может находиться в равновесии в двух случаях. В первом случае грузы с массами m_1 и m_2 погружены в жидкость на половину своего объёма. Во втором случае груз с массой m_3 оказался погруженным на одну шестую часть своего объёма. Найдите, на какие части объёма были погружены остальные грузы во втором случае.



Решение. Обозначим силу Архимеда как F_A , а силу натяжения нити как T . Изобразим силы, действующие в системе в первом и втором случаях:

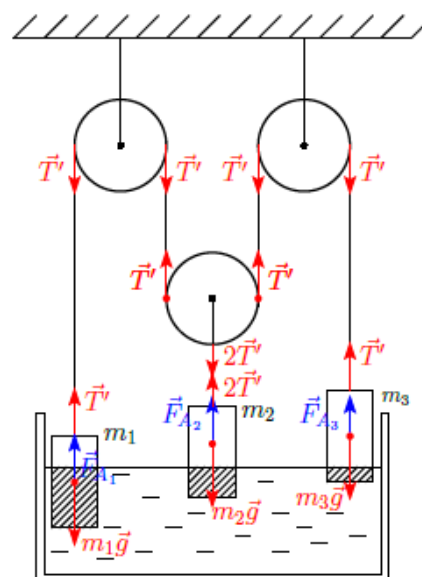
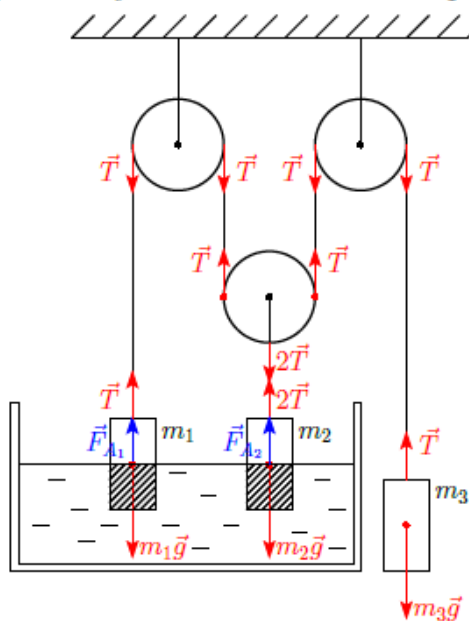


Рис. 1

В первом случае условия равновесия грузов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 g = T + \rho g \frac{V}{2} \\ m_2 g = 2T + \rho g \frac{V}{2} \\ m_3 g = T. \end{cases} \quad (1)$$

Упрощаем:

$$\begin{cases} m_1 g = m_3 g + \rho g \frac{V}{2} \\ m_2 g = 2(m_3 g) + \rho g \frac{V}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Во втором случае обозначим за x и y доли объёма погружённых частей первого и второго груза, запишем условие равновесия:

$$\begin{cases} m_1 g = T' + \rho g V x \\ m_2 g = 2T' + \rho g V y \\ m_3 g = T' + \rho g \frac{V}{6}. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляем третье уравнение из системы (3) в первые два, получаем:

$$\begin{cases} m_1 g = m_3 g + \rho g V \left(x - \frac{1}{6} \right) \\ m_2 g = 2m_3 g + \rho g V \left(y - \frac{1}{3} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Приравниваем правые части из двух систем 2 и 4:

$$\begin{cases} m_3 g + \rho g \frac{V}{2} = m_3 g + \rho g V \left(x - \frac{1}{6} \right) \\ 2(m_3 g) + \rho g \frac{V}{2} = 2m_3 g + \rho g V \left(y - \frac{1}{3} \right). \end{cases} \quad (5)$$

И получаем:

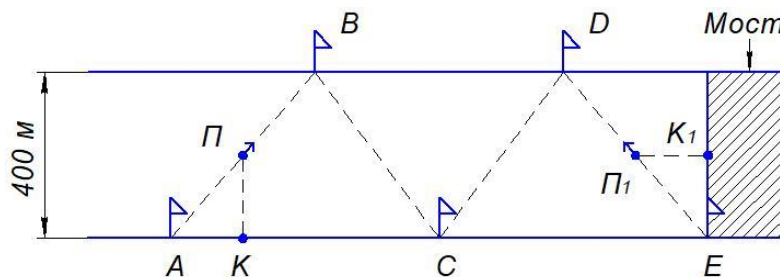
$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{6}. \end{aligned} \quad (6)$$

Критерии оценивания задачи №3 (Блоки)

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Верно изображены силы на рисунках.	См. рисунок 1.	3
2	Записана система условий равновесия для первого случая.	Формула (1)	2
3	Записана система условий равновесия для второго случая.	Формула (3)	2
4	Приравнены правые части и составлена общая система.	Формула (5)	1
5	Выражен и посчитан ответ.	Формула (6)	2

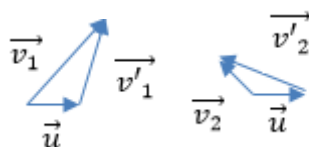
Задача 4. Эстафета на реке.

На берегу стоит кинооператор, который при движении от старта (А) находится напротив пловца (П) в реке (К). Контрольные точки находятся на одинаковом расстоянии так, как показано на рисунке. С какой по модулю скоростью плыл пловец относительно воды, расстояние между флажками $AB=BC=CD=DE=500$ м, ширина реки 400 м. При движении по течению кинооператор идёт со скоростью 3 км/ч. Когда пловец поплыл обратно (Π_1), кинооператор решил поменять ракурс и решил быть напротив пловца вдоль реки (K_1) и двигаться с той же со скоростью 3 км/ч. Пловец плывёт с одной и той же по модулю скоростью относительно воды и чётко в направлении следующей контрольной точки относительно берега. В оба направления скорость пловца относительно воды по модулю не меняется.



Возможное решение:

- Нарисуем векторные диаграммы для данного движения, где $\vec{v}_1$ – скорость пловца при движении по течению в СО-берег, $\vec{v}_2$ – скорость пловца при движении против течения в СО-берег, v'_1 и v'_2 – скорости пловца в СО-вода при движении по и против течения соответственно, $\vec{u}$ – скорость течения воды в СО-берег.



$$2. \quad \vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}'_1 \quad ; \quad \vec{u} + \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 \quad (1)$$

$$\text{По условию } v'_1 = v'_2 \quad (2)$$

- Введём систему координат ОХУ, где ОХ направлена по течению, а ОУ перпендикулярно берегу.

- Скорость кинооператора по условию совпадает с соответствующими проекциями скорости пловца при движении по и против течения $v_{1x} = 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = v_{2y} \quad (3)$

Тогда из (1) и (2) следует:

$$v_{1x} = u + v'_{1x}; \quad v'_{1y} = v_{1y}; \quad v_{2x} = v'_{1x} - u; \quad v'_{2y} = v_{2y} \quad (4)$$

$$(v'_{1x})^2 + (v'_{1y})^2 = (v'_{2x})^2 + (v'_{2y})^2 \quad (5)$$

$$l = 500 \text{ м}; l_1 = 400 \text{ м}; l_2 = \sqrt{l^2 - l_1^2} = 300 \text{ м} \quad (6)$$

$$5. \text{ При движении по течению } l_1 = v_{1y}t_1; l_2 = v_{1x}t_1 \Rightarrow v_{1y} = \frac{l_1}{l_2} v_{1x} \quad (7)$$

$$\text{При движении против течения } l_1 = v_{2y}t_2; l_2 = v_{2x}t_2 \Rightarrow v_{2x} = \frac{l_2}{l_1} v_{2y}. \quad (8)$$

Решая систему уравнений, получим, что

$$u = 1,04 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; v'_1 = 4,45 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Система оценивания задачи:

Сделаны векторные диаграммы и записаны уравнения (1) и (2) – **2 балла**

Найдено соотношение (3) – **1 балл**

Получены соотношения (4) – **1 балл**

Получено соотношение (5) – **1 балл**

Получено соотношение между проекциями (7) и (8) – **3 балла**

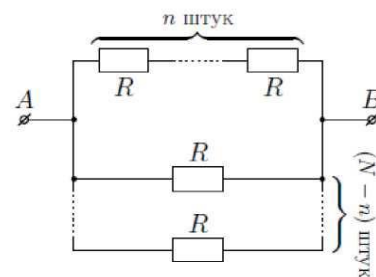
Найдена скорость пловца относительно воды – **2 балла**

Максимальный балл за полное решение – 10 баллов

Задача 5. Одинаковые резисторы.

У школьника Саши есть N одинаковых резисторов сопротивлением R каждый. Саша собрал из них такую цепочку: n резисторов он соединил последовательно, а все остальные присоединил параллельно к ним. Саша с помощью омметра измерил зависимость общего сопротивления $R_{\text{общ}}$ цепочки от числа последовательно соединённых резисторов, получившаяся зависимость приведена в таблице ниже.

n	2	3	4	5	6	7	8
$R_{\text{общ}}, \text{ Ом}$	9,4	10,9	12,8	15,4	19,2	25,5	37,6



Запишите формулу для сопротивления цепочки $R_{\text{общ}}$, выразив его через следующие параметры: сопротивление одного резистора R , число соединённых последовательно резисторов n и полное число резисторов N .

Перепишите эту формулу в виде $y = N - Rx$, для чего определите величины x и y .

Постройте зависимость $y(x)$ на имеющемся листке в клетку и графически определите значения сопротивления одного резистора R и полного числа резисторов N .

Решение. Общее сопротивление последовательно соединённой части цепочки будет равно nR , тогда для параллельного соединения

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \dots + \frac{1}{R}}_{N-n \text{ раз}} + \frac{1}{nR} = \frac{N-n}{R} + \frac{1}{nR} = \frac{(N-n)n + 1}{nR}. \quad (1)$$

Тогда полное сопротивление цепочки

$$R_{\text{общ}} = \frac{nR}{(N-n)n + 1}. \quad (2)$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$nR = R_{\text{общ}}((N - n)n + 1) = R_{\text{общ}}(Nn - n^2 + 1). \quad (3)$$

Чтобы при полном числе резисторов N был множитель, равный единице, разделим это уравнение на $R_{\text{общ}} \cdot n$:

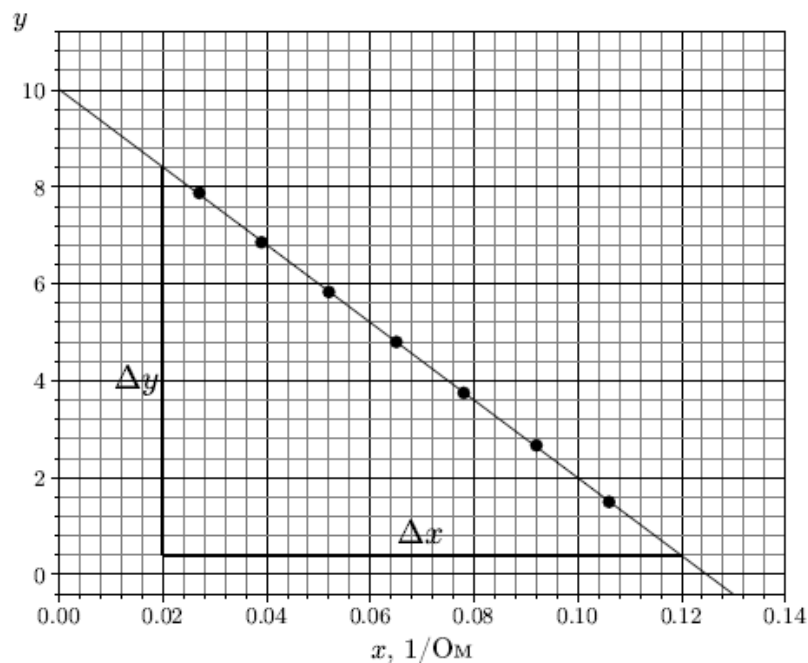
$$\frac{R}{R_{\text{общ}}} = N - n + \frac{1}{n}, \quad n - \frac{1}{n} = N - R \cdot \frac{1}{R_{\text{общ}}}. \quad (4)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = N - R \cdot x$, установим, что

$$y = n - \frac{1}{n}, \quad x = \frac{1}{R_{\text{общ}}}. \quad (5)$$

График зависимости $y(x)$ будет иметь вид прямой линии, полное число резисторов N можно найти по точке пересечения прямой с осью Oy , а сопротивление одного резистора R — по угловому коэффициенту прямой. Вычисляем значения x и y , заносим их в таблицу и строим график:

n	2	3	4	5	6	7	8
$R_{\text{общ}}, \text{ Ом}$	9,4	10,9	12,8	15,4	19,2	25,5	37,6
$x, 1/\text{Ом}$	0,106	0,092	0,078	0,065	0,052	0,039	0,027
y	1,500	2,667	3,750	4,800	5,833	6,857	7,875



По графику находим:

$$N = 10, \quad R = \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} = \frac{8,4 - 0,4}{0,12 - 0,02} = 80 \text{ Ом}. \quad (6)$$

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Выведена формула зависимости $R_{\text{общ}}$ от R, n, N .	Формула (2) или эквивалентная	3
2	Определены формулы для величин x, y в линейной зависимости $y = N - R \cdot x$.	$y = n - \frac{1}{n}, \quad x = \frac{1}{R_{\text{общ}}}$.	3
3	Построен график функции $y(x)$, что включает в себя: • подписаны оси, • поставлены точки, • выбран подходящий масштаб, чтобы график занимал не менее 80% места, • проведена прямая.		2, из них: 0,5 0,5 0,5 0,5
4	Определена величина R с точностью не хуже ± 3 Ом.	$R = 80$ Ом	1
5	Определена величина N .	$N = 10$	1