Астрономия, 11 класс, муниципальный этап

Общие рекомендации для членов жюри

1. Решение каждой задачи предлагается оценивать по **8-бальной** системе. Максимальное количество баллов присуждается только при наличии объяснения полученного результата.
2. При проверке работ несколькими членами жюри целесообразно распределить задачи между проверяющими так, чтобы одну задачу проверял только один член жюри. Это позволяет сохранить объективность проверки.
3. Организатор олимпиады должен предоставить участнику дополнительные данные, необходимые для получения численного результата в соответствии с содержанием текстов заданий.
4. При численных расчетах необходимо соблюдать правила действия с приближенными величинами.

Решения

<u>Задание 1.</u>

С какой минимальной скоростью $V_{cп}$ самолет должен лететь вблизи поверхности Земли, чтобы в течение максимального времени его пассажиры могли наблюдать полное солнечное затмение?

Решение:

Полагаем, что происходит полное центральное солнечное затмение, которое на Земле длится в течение 2.5 часов, а полоса полной фазы затмения располагается вдоль земного экватора. Центры Солнца, Луны, Земли, точки на поверхности Земли, самолета находятся на одной прямой.

Скорость самолета V_c относительно центра Земли полагаем равной скорости Луны относительно центра Земли.

$$V_c = V_Л.$$

Найдем скорость Луны (относительно центра Земли), приравнивая центростремительное ускорение Луны, умноженное на массу Луны, силе тяготения, действующей на Луну со стороны Земли, или, учитывая, что гравитационная масса Луны равна инертной массе Луны,

$$\frac{V_Л^2}{r} = \frac{GM}{r^2}.$$

Здесь
r – расстояние между центрами Земли и Луны,
M – масса Земли,
G – гравитационная постоянная.
Массой Луны пренебрегаем.

Тогда,

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

$$V_c = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{384400 \cdot 10^3}} = 0.0102 \cdot 10^5 м/с = 1.02 км/с.$$

Земля вращается вокруг оси. Линейную скорость $V_З$ точки земного экватора, относительно центра Земли, определим из равенства

$$V_З = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}.$$

Здесь
T = 23 час. 56 мин. 04 с – период вращения Земли вокруг оси.
R = 6378 км – экваториальный радиус Земли.

Тогда

$$V_З = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6378 \cdot 10^3}{23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4} = 0.465 \cdot 10^3 \quad \text{м/с.}$$

$V_{сп} = V_З – V_с$.

$V_{сп}$ = 1020 – 465 = 555 м/с.

Примечание.
Расстояние, которое проходит тень Луны за t =2.5 часа на поверхности Земли во время солнечного затмения, составляет s = 10000 км.

Отсюда находим *среднюю* скорость движения тени Луны на поверхности Земли.

$$V = s/t.$$

V = 10000/2.5 = 4000 м/с (в общем случае, скорость тени Луны на поверхности Земли является переменной величиной.
Для затмения 22 июля 2009 года, скорость тени Луны на поверхности Земли изменялась от 2 км/с до 9 км/с – с учетом гелиоцентрических движений Земли и Луны).

Ответ: 0.555 км/с (для случая, когда все тела находятся на одной прямой).

Рекомендации для жюри:
Выбор положений тел – на одной прямой – 3 балла.
Вычисление скорости Луны – 2 балла.
Определение скорости точки, лежащей на экваторе Земли – 2 балла.
Вычисление относительной скорости самолета – 1 балл.
Если указывается средняя скорость движения тени Луны или самолета, без каких-либо расчетов и указаний, то ставится оценка не выше 2 баллов.

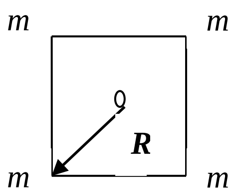
Задание 2.

Четыре тела одинаковой массы m расположены в вершинах квадрата со стороной a. Система равномерно вращается с угловой скоростью относительно центра масс. Определите угловую скорость ω вращения системы как целого.

Решение:

Выполним рисунок.

R – вектор, определяющий положение одного из тел.



Проектируя центростремительное ускорение указанного тела и силы тяготения, действующие на это же тело, на направление ***R***, с учетом второго закона Ньютона, найдем

$$m\omega^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{2Gmm}{a^2}\cos 45^\circ + \frac{Gmm}{2a^2}.$$

Окончательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$

Рекомендации для жюри:

Рисунок оценивается в 1 балл.

Запись второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения дают 2 балла (по баллу за каждое уравнение).

Выражение для угловой скорости ω повышает оценку на 5 баллов.

Задание 3.

Комета с параболической орбитой сближается в перигелии своей орбиты с планетой, мгновенно касается ее поверхности и переходит на гелиоцентрическую эллиптическую орбиту. Докажите, что при соотношении периодов кометы (на эллиптической орбите) и планеты $T_К:T_П = 1:2$ угол поворота вектора гелиоцентрической скорости кометы составит $\theta = 156°$. Движение тел происходит в одной плоскости. Радиус круговой орбиты планеты равняется a. (Взаимодействие кометы с планетой сводится к мгновенному повороту вектора гелиоцентрической скорости кометы в перигелии параболической орбиты кометы. В начальный момент времени вектор параболической скорости кометы – в перигелии ее орбиты – параллелен вектору круговой скорости планеты).

Решение:

Круговую гелиоцентрическую скорость планеты $V_п$ на расстоянии a от Солнца определим из соотношения

$$V_п = \sqrt{\frac{GM_C}{a}}.$$

Гелиоцентрическую скорость кометы $V_к$ на параболической орбите найдем из условия

$$V^2{}_К = \frac{2GM_C}{a}.$$

Планетоцентрическую скорость $V_{кп}$ кометы в момент сближения с планетой определим по правилу сложения скоростей

$$V_{кп} = V_к - V_п.$$

Гелиоцентрическую скорость кометы $V_к{}'$ на эллиптической орбите найдем из закона сохранения энергии

$$V'^2{}_к = GM_C\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a'}\right).$$

Здесь
G – гравитационная постоянная,
M_C – масса Солнца,
a' - большая полуось орбиты кометы (для эллиптической орбиты).

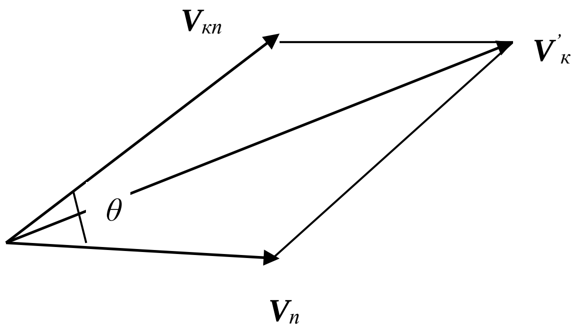
По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_п}{T_к} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{3/2}.$$

С учетом условия задачи

$$V_к'^2 = \frac{GM_C}{a}\left(2 - 2^{2/3}\right).$$

С другой стороны, изобразим на рисунке скорость планеты $\mathbf{V}_п$, планетоцентрическую скорость кометы $\mathbf{V}_{кп}$ – (при выходе из сферы действия планеты), гелиоцентрическую скорость кометы на новой орбите $\mathbf{V}_к{}'$ и угол поворота θ планетоцентрической скорости кометы $\mathbf{V}_{кп}$.



По теореме косинусов выразим $V'_к$

$$V'^2_К = V^2_п + V^2_{кп} - 2V_п V_{кп}\cos(180^\circ - \theta).$$

Тогда

$$\cos\theta = \frac{V'^2_к - V_п^2 - V_{кп}^2}{2V_п V_{кп}}.$$

Выражения для всех скоростей, записанных выше, поставим в выражение для cosθ.

$$\cos\theta = \frac{\frac{GM_C}{a}\left(2 - 2^{2/3}\right) - \frac{GM_C}{a} - \frac{GM_C}{a}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}{2\cdot\sqrt{\frac{GM_C}{a}}\cdot\sqrt{\frac{GM_C}{a}}\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right)}.$$

После очевидных преобразований

$$\cos\theta = 1 - 2^{-1/3}\cdot\left(\sqrt{2} + 1\right) = 1 - 0.7936508\cdot\left(1.4142136 + 1\right) = -0.9160425.$$

Θ = 2.728805805 рад = 156.3542123°.

Ответ: $\Theta \equiv 156^\circ$.

Рекомендации для жюри:

За определения круговой скорости планеты, параболической скорости кометы и начальной планетоцентрической скорости кометы ставится по 1 баллу за каждый ответ.

За указание закона сохранения энергии (в рамках задачи двух тел), третий закон Кеплера и определение скорости кометы на эллиптической орбите также ставится по одному баллу.

За выражение для определения угла поворота планетоцентрической скорости кометы ставится 1 балл.

Правильные вычисления повышают оценку на 1 балл.

Задание 4.

Два астероида имеют одинаковый синодический период S и один и тот же эксцентриситет орбит. Оба движутся в плоскости круговой орбиты Земли. При каком одинаковом для обеих орбит эксцентриситете e, астероиды будут сближаться с Землей на одно и то же минимальное расстояние Δ, соответственно в перигелии и афелии своих орбит? Считать, что первый астероид движется по орбите, расположенной вне орбиты Земли (пренебрегаем возможным его заходом внутрь орбиты Земли при вычислении S), а орбита второго астероида находится внутри орбиты Земли (пренебрегаем его возможным выходом из орбиты Земли при вычислении S).

Решение:

Обозначим через a_1, a_2, a большие полуоси орбит астероидов и Земли, соответственно.

Предполагаем, что «внешний» астероид сближается с Землей до расстояния Δ_1 в перигелии своей орбиты, а «внутренний» астероид сближается с Землей до расстояния Δ_2 в афелии своей орбиты.

Тогда, по условию задачи,

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$.
$\Delta_1 = a_1 (1 - e) - a$.
$\Delta_2 = a - a_2 (1 + e)$.

Приравнивая Δ_1 и Δ_2, найдем

$$e = \frac{2 - \left(\frac{a_2}{a}\right) - \left(\frac{a_1}{a}\right)}{-\left(\frac{a_1}{a}\right) + \left(\frac{a_2}{a}\right)}.$$

Отношения большой полуоси орбиты каждого астероида и большой полуоси орбиты Земли найдем по третьему закону Кеплера

$$\frac{a_1}{a} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{2/3}.$$

$$\frac{a_2}{a} = \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}.$$

Сидерические периоды астероидов выразим из уравнений синодического движения

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1},\ T_1 = \frac{S}{S - T}.$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T}, T_2 = \frac{S}{S + T}.$$

Полагая, T = 1 год, a = 1 астрономическая единица, получим выражение для вычисления эксцентриситета орбит астероидов

$$e = \frac{2 - \left(\frac{S}{S-1}\right)^{2/3} - \left(\frac{S}{S+1}\right)^{2/3}}{-\left(\frac{S}{S-1}\right)^{2/3} + \left(\frac{S}{S+1}\right)^{2/3}}.$$

Ответ: $e = \frac{2 - \left(\frac{S}{S-1}\right)^{2/3} - \left(\frac{S}{S+1}\right)^{2/3}}{-\left(\frac{S}{S-1}\right)^{2/3} + \left(\frac{S}{S+1}\right)^{2/3}}.$

Рекомендации для жюри:
Представление о перигельных и афелийных расстояниях небесных тел, третьем законе Кеплера и уравнениях синодического движения дает по 1 баллу за каждое соответствующее математическое выражение.
Запись выражения для эксцентриситета орбит дает еще 4 балла.
Обратим внимание, что астероиды могут заходить внутрь орбиты Земли (внешний) и выходить из орбиты Земли (внутренний), поэтому разность между перигелийным расстоянием первого астероида и радиусом Земли, а также разность между радиусом Земли и афелийным расстоянием второго астероида должны быть отрицательными.
Школьники, заметившие эти особенности движения астероидов, должны быть поощрены 1-2 баллами (но общая оценка не должна быть больше 8 баллов).

Задание 5.

При какой энергии E электрон с «классическим» радиусом r_e может превратиться в черную дыру? Принять, что масса электрона имеет электромагнитное происхождение.

Решение:

Гравитационный радиус r_g тела с массой m определяется из условия

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}. \qquad (1)$$

Здесь
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная,
$c = 3 \cdot 10^8$ – скорость света.

Тогда, по условию задачи,

$$r_g = r_e. \qquad (2)$$

$$m = E/c^2. \qquad (3)$$

Приравнивая электростатическую энергию электрона его полной энергии, найдем

$$\frac{e^2}{r_e} = m_e c^2. \text{ (Система СГС).}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} = m_e c^2. \text{(Система СИ).}$$

Здесь
e = 1.6·10^{-19}Кл – электрический заряд электрона,
ε_0 = 8.85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная.

В системе СГС находим «классический» радиус электрона

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}.$$

В системе СИ

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}. \qquad (4)$$

Из уравнений (1), (2), (3), (4), имеем

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_9 m_e c^2} = \frac{2G\dfrac{E}{c^2}}{c^2}.$$

Окончательно (в системе СИ)

$$E = \frac{e^2 c^2}{8\pi\varepsilon_0 G m_e}.$$

В числовой форме

$$E = \frac{(1.6\cdot10^{-19})^2\cdot(3\cdot10^8)^2}{8\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\cdot6.67\cdot10^{-11}\cdot9.1\cdot10^{-31}} = 17.074\cdot10^{28}\text{ Дж} = 10.67\cdot10^{47}\text{эВ.}$$

Ответ: E = 10.67·10^{47} эВ.

Рекомендации для жюри:
Определение гравитационного радиуса черной дыры оценивается в 1 балл.
Связь между массой и энергией дает 1 балл.
Определение классического радиуса электрона повышает оценку на 3 балла.
Вычисление энергии E дает еще 3 балла.

<u>Задание 6.</u>

В космологических исследованиях часто используют систему единиц, в которой $h = 1$, $c = 1$, $G = 1$ (постоянная Планка, скорость света и гравитационная постоянная, соответственно). Используя такую нестандартную систему единиц, оцените массу видимой части Вселенной в килограммах, если границы находятся на расстоянии 13.9 миллиардов световых лет.

Решение:

Для перевода данного расстояния $L_м$ в метрах в расстояние $L_{кг}$, выраженное в килограммах, запишем соотношение

$$L_{кг} = L_м \cdot h^{\alpha} \cdot G^{\beta} \cdot c^{\gamma}.$$

Поскольку размерности левой и правой частей этого соотношения должны совпадать, то запишем

$$кг^1 = м^1 \cdot \left[\frac{кг \cdot м^2}{с}\right]^{\varepsilon} \cdot \left[\frac{м^3}{кг \cdot с^2}\right]^{\beta} \cdot \left[\frac{м}{с}\right]^{\gamma}.$$

Показатели степеней при единицах измерений (кг, м, с) должны совпадать в левой и правой частях. Приходим к системе уравнений

кг. $1 = \alpha - \beta$.

м. $0 = 1 + 2\alpha + 3\beta + \gamma$.

с. $0 = -\alpha - 2\beta - \gamma$.

Решаем данную систему линейных уравнений и находим

$\alpha = 0$.

$\beta = -1$.

$\gamma = 2$.

В выбранной системе единиц расстояние выразится в *килограммах*

$$L_{кг} = L_М \cdot h^0 \cdot G^{-1} \cdot c^2.$$

При $L_м = 13.9 \cdot 10^9 \cdot 365.2422 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^8$ м, $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$м^3/(кг·с^2), $c = 03 \cdot 10^8$м/с получим $L_{кг} = 13.9 \cdot 10^9 \cdot 365.2422 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot (6.672 \cdot 10^{-11})^{-1} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1.7 \cdot 10^{53}$ кг.

(По порядку величины совпадает с массой видимой части Вселенной).

Ответ: $L_{кг} = 1.7 \cdot 10^{53}$ кг.

Рекомендации для жюри:

Знание – в системе СИ – гравитационной постоянной, скорости света, постоянной Планка оценивается по 1 баллу (за каждую величину).

Переход от измерений длины в метрах к измерению длины в килограммах дает 3 балла.

Верные вычисления $L_{кг}$ повышают оценку на 2 балла.

Примечание.

В системе единиц $G = h = c = 1$ находят и энергию частиц, при которой происходит «великое объединение» всех известных взаимодействий,

$$E = \sqrt{\frac{c^5 h}{G}} \sim 10^{19}\ ГэВ;$$

и температуру Вселенной, при которой осуществляется это взаимодействие,

$$T = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{c^5 h}{G}} \sim 10^{32}\ \text{K}.$$

Здесь k = 1.38·10^{-23} Дж/К.

С помощью этой системы единиц оцениваются и другие экстремальные параметры элементарных частиц и Вселенной.