Задачи для 11 класса.

1. На какой широте проходит южная граница территории, в пределах которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки (центр Солнца опускается под горизонт ниже, чем на 12^0)? Плоскость небесного экватора наклонена к эклиптике на $\varepsilon = 23^0 27'$.

   Ответ. Ниже всего Солнце опускается в полночь, в Северном полушарии его «полуночная» высота находится по формуле: $h = \varphi - 90^{o} + \delta$, где δ - склонение солнца. Если h имеет отрицательное значение, это означает, что Солнце под горизонтом. Наибольшее склонение Солнце имеет 22 июня, $\delta = \varepsilon = 23^0\ 27'$. Граница территории, на которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки, находится из этого уравнения при $h = -12^0$ и $\delta = \varepsilon$: $\varphi = -12^0 + 90^0 - 23^0 27' = 54^0 33'$. Заметим, что эта параллель проходит по северной части Калуги (для центра Калуги $\varphi = 54^0\ 31'$). Что же касается Южного полушария, то существует лишь северная граница подобной территории

2. На какой максимальной высоте может кульминировать Луна в Троицке? Наклонение эклиптики к плоскости небесного экватора составляет ε = 23,5°, а плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики $\iota = 5.1°$, широта и долгота Троицка - $\varphi \approx 55°30'$ с.ш., $\lambda \approx 37°15'$ в.д.

   Ответ. Очевидно, что максимальная высота кульминации будет в тот момент, когда у Луны максимальное склонение. Ее склонение же может быть в пределах от $-(\varepsilon + i)$ до $(\varepsilon + i)$, то есть от $-28{,}6^0$ до $28{,}6^0$. Максимальная высота кульминации: $h_{\square} = 90^0 - \varphi + \delta_{max}$, $h_{\square} = 90^0 - 55^0 30' + 28{,}6^0 \approx 63{,}1^0$.

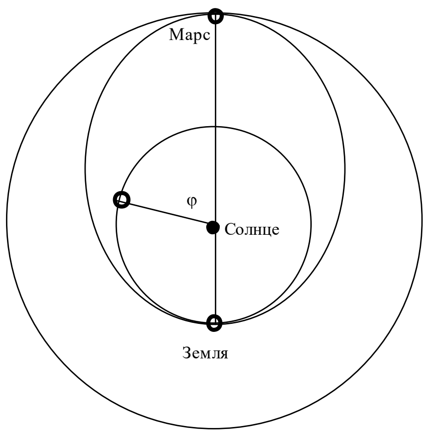
3. На медленно вращающийся астероид диаметром 2.2 км и средней плотности 2.2 г/см^3 совершил посадку космический корабль. Космонавты решили объехать этот астероид на вездеходе за 2.2 часа. Смогут ли они это сделать? Если нет, то почему? Если да, то как?

   Ответ. Вездеход должен двигаться со скоростью не больше первой космической, иначе он оторвется от поверхности и потеряет опору. Легко найти, что время облета астероида по низкой орбите с этой предельной скоростью будет равно $T = \sqrt{\frac{3\pi}{GM}} \approx 2.226$ часа. Поэтому невращающийся астероид за указанное время объехать нельзя. Но если астероид хотя бы медленно вращается, то возможность объехать этот астероид зависит от направления объезда! Чтобы объехать астероид, двигаться надо в сторону, противоположную собственному движению астероида.

4. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гомана-Цандера (в перигелии эта орбита касается орбиты Земли, а в афелии - орбиты Марса). Найдите время такого перелета, а так же минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по орбите такой же формы. Из численных данных Вам известны только периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца, соответственно: $T_З$=365,25 суток и $T_М$=687 суток. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

<u>Ответ</u>. Большая полуось орбиты, по которой космический корабль совершает перелет (а), очевидно, будет равна полусумме орбит Земли и Марса: $a=(a_з+a_м)/2$.

По третьем у закону Кеплера квадраты периодов обращения небесных тел вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит, поэтому $a \sim T^{2/3}$. Тогда периоды обращения корабля по орбите: $T^{2/3} = \dfrac{(T_{,}^{2/3} + T_M^{2/3})}{2}$, то есть $T = \dfrac{\sqrt{\left(T_З^{2/3} + T_M^{2/3}\right)^3}}{\sqrt{2^3}}$. Время перелета τ от Земли до Марса равно половине периода обращения по орбите,



следовательно, $\tau = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\left(365.25^{2/3} + 687^{2/3}\right)^{3/2}}{2^{5/2}} \approx 259$ суток. (4 балла)

Для вычисления времени, в течении которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по такой же орбите, заметим, что в момент прилета Земля опережает Марс на угол $\varphi = \omega_з\tau - \pi = 2\pi\tau/Tз - \pi$, где $\omega_з = 2\pi/Tз$ - угловая скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца.

В момент отправления в обратный путь Земля, очевидно, должна отставать от Марса на такой же угол φ, что соответствует опережению на угол $2\pi k - \varphi$ (где k - целое число). Для вычисления минимального времени надо найти такое минимальное k, при котором $(2\pi k - \varphi) > \varphi$. Из численных данных видно, что в нашем случае k=1. Время, за которое опережение Земли увеличится с φ до $2\pi - \varphi$ равно $T_{ожид} = \dfrac{2\pi - 2\pi}{w_з - w_м}$, где $(\omega_з - \omega_м)$ - относительная угловая скорость движения Земли и Марса, $\omega_з - \omega_м = \dfrac{2\pi}{T_з} - \dfrac{2\pi}{T_м}$, $T_{ожид} = \dfrac{1-\varphi/\pi}{1/T_з - 1/T_м} = \dfrac{2 - 2\tau/Tз}{1/T_з - 1/T_м}$. Численно $T_{ожид} \approx 454$ суток. (4 балла)

5. Пульсар, находящийся вблизи полюса эклиптики и имеющий массу $4 \cdot 10^{33}$ г (две массы Солнца), излучает импульсы с периодом 1с. Точные измерения получаемых сигналов показали, что его период не строго постоянен и меняется с периодичностью 1 год с амплитудой 10^{-8}с. Спутник какой массы, обращающийся вокруг пульсара по круговой орбите, может вызывать эти изменения?

   Ответ. Пульсар и его спутник обращается с периодом T вокруг общего центра масс, расположенного вблизи центра пульсара. Масса пульсара - M, масса спутника - m. M>>m. V- скорость пульсара, V_c- скорость спутника; R, R_c- радиусы их круговых орбит вокруг центра масс. Орбитальная скорость пульсара, определенная по закону Доплера, составит: $V=c*dP/P=3*10^8$ м/с $*10^{-8}$ = 3 м/с. В системе отсчета, связанной с центром масс, суммарный вектор импульса спутника и пульсара равен нулю, поэтому: $mV_c = MV$ или $m = \frac{MV}{V_c}$. Тот же вывод следует и из определения центра масс и равенства периодов: $\frac{R}{R_c} = \frac{M}{m}$; $\frac{R_c}{V_c} = \frac{R}{V}$. (4 балла).

   Скорость спутника на круговой орбите всегда равна $Vc = \sqrt{\frac{GM}{R_c}}$, G-гравитационная постоянная. Отсюда $T = \frac{2\pi R_c}{V_c} = \frac{2\pi GM}{{V_c}^3}$ или $V_c = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$.

   Выразим массу спутника $m = MV\sqrt[3]{\frac{T}{2\pi GM}}$. Подставляя численные значения, получаем $m=3.2 \cdot 10^{26}$кг. (то есть 53 массы Земли). (4 балла)

6. В ночь с 23 на 24 февраля 1987 года астрономы зафиксировали вспышку сверхновой звезды в галактике Большое Магелланово Облако, расстояние от Земли до которой 55 кпс. В каком году на самом деле произошла эта вспышка?

   Ответ. 55 кпс - это $55000 \cdot 3.26 \approx 180000$ световых лет. То есть, свет из Большого Магелланова Облака идет до нас около 180000 лет, и любое событие, которое мы видим сейчас, произошло там уже 180 тысяч лет тому назад. Вычислять точно год, в котором на самом деле произошла вспышка сверхновой, бессмысленно, поскольку точность, с которой дано расстояние до галактики, явно не превышает 1%. Правильный ответ: около 180 тысяч лет тому назад.