

**Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по астрономии
2018/19 учебный год**

Возможные решения и критерии оценивания

10 класс

№ 1. Черные дыры разрывают звезды. Оцените массу M черной дыры (ЧД), гравитация которой будет разрывать звезды вблизи ее горизонта событий. Данные о разрываемых звездах: $M_{зв} = 2 \cdot 10^{30}$ кг; $R_{зв} = 7 \cdot 10^8$ м. Массу ЧД выразите в единицах солнечной массы. Гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (Н·м²/кг²). Масса Солнца: $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Скорость света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:

Звезда разрывается приливными силами поля тяготения ЧД. Приливное ускорение:

$$a_{np} = \frac{2GM_{зв}}{r^3}$$

Собственное гравитационное ускорение звезды:

$$g = \frac{GM_{зв}}{R_{зв}^2}$$

Масса ЧД определяется из условия приливного разрушения звезды $a_{np} \geq g$:

$$M \leq \frac{1}{2\sqrt{M_{зв}}} \cdot \left(\frac{R_{зв} c^2}{G} \right)^{3/2} = 3,2 \cdot 10^{38} \text{ кг} = 1,6 \cdot 10^8 M_{\odot}$$

Правильный ответ:

8 баллов

№ 2. Предельная масса звезды с термоядерным источником энергии. На основе общего соотношения «светимость-масса» $\frac{L}{L_{\square}} = \left(\frac{M}{M_{\square}} \right)^n$ выясните, какой может быть масса звезды с термоядерным источником энергии при $n = 3$. Критическая (эддингтоновская) светимость звезды определяется формулой

$$L_{KP} = 3 \cdot 10^4 L_{\square} \left(\frac{M}{M_{\square}} \right) \text{ эрг/с,}$$

где M - масса звезды.

Решение:

Для звезды должно выполняться условие устойчивости звезды $L \leq L_{KP}$

(в противном случае звезда будет разорвана силами давления излучения). Следовательно,

$$\frac{M}{M_{\square}} \leq (3 \cdot 10^4)^{\frac{1}{2}} \rightarrow M \leq 170 M_{\odot}$$

Правильный ответ

8 баллов

№ 3. Предел Оппенгеймера-Волкова (1939г). Нейтронная звезда удерживается от гравитационного коллапса давлением вырожденного нейтронного газа. В предельном (ультрарелятивистском) случае давление P_n нейтронного газа можно оценить по формуле $P_n \approx \hbar c n^{4/3}$, где

$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка; $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме; n - концентрация нейтронов. Оцените максимальную массу нейтронной звезды (в единицах солнечной массы $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ кг). Масса нейтрона $m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (Нм² / кг²).

Решение:

Запишем условие условия гидростатического равновесия звезды:

$$\rho g R \approx \hbar c n^{4/3}.$$

Учитывая, что $\rho \approx m_n n \approx M / R^3$ и $g \approx GM / R^2$
из (15.1) получаем:

$$M \approx \frac{(\hbar c / G)^{3/2}}{m_n^2} \approx 3,6 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1,8 M_{\odot}.$$

Правильный ответ:

8 баллов

№ 4. Вокруг Луны.

Космический корабль движется вокруг Луны по эллиптической орбите с максимальным удалением от поверхности Луны (в апоселении) $h_A = 312$ км и минимальным удалением (периселении) $h_P = 112$ км. На сколько нужно изменить скорость корабля, чтобы перевести его на круговую орбиту с высотой полета $h_P = 112$ км над поверхностью Луны, если двигатель включался на короткое время, когда корабль находился в периселении? Данные о Луне: $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг; $R = 1740$ км. Сколько топлива будет израсходовано в таком маневре? Масса корабля на круговой орбите $m_0 = 20$ т. Скорость истечения газа из сопла двигателя равна $u = 4$ км/с относительно корабля.

Решение:

1. Скорость движения по круговой орбите, лежащей на высоте $h_P = 112$ км, равна

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{GM}{R + h_P}} = 1630 \text{ (м/с)}$$

При движении по эллиптической орбите скорость КК в периселении определится из системы 2-х уравнений (закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса (2-й закон Кеплера)). Применительно к точкам P (периселений) и A (апоселений) эллиптической траектории эта система уравнений имеет вид:

$$\frac{mv_P^2}{2} - \frac{GMm}{r_P} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_A},$$
$$r_P m v_P = r_A m v_A,$$

где m – масса КК, $r_P = R + h_P$, $r_A = R + h_A$. Т.о., скорость КК в точке P траектории –

$$v_P = \sqrt{\frac{2GM}{r_P \left(1 + \frac{r_P}{r_A}\right)}} = 1670 \text{ (м/с)}$$

Для перехода на круговую орбиту в точке P траектории скорость КА должна измениться на величину $\Delta v_P = v_{кр} - v_P = -40$ м/с, т.е. двигательная установка КК должна сработать таким образом, чтобы уменьшить скорость КК на 40 м/с.

2. Массу израсходованного топлива можно оценить из уравнения

$$\frac{|\Delta m|}{m_0} = \frac{|\Delta v|}{u},$$

которое следует из закона сохранения импульса и теоремы сложения скоростей (это уравнение соответствует приближению «мгновенного» сгорания топлива):

$$|\Delta m| = \frac{m_0 |\Delta v_p|}{u} = 200 \text{ кг}$$

Если воспользоваться формулой Циолковского $m = m_0 e^{-\frac{|\Delta v|}{u}}$, то масса израсходованного топлива –

$$|\Delta m| = m_0 \left(1 - e^{-\frac{|\Delta v_p|}{u}} \right) = 199 \text{ кг}$$

Правильное решение:

8 баллов

№ 5. Покрытие звезд Луной. Во время астрономо-геодезических работ, проводившихся в Туркестане, капитан Генерального штаба Гедеонов наблюдал 29 сентября 1884 г. в урочище Чарбек покрытия звезд 6992 и β Capricorni в $22^{\text{h}} 22^{\text{m}} 47^{\text{s}},48$ и $22^{\text{h}} 29^{\text{m}} 10^{\text{s}},16$ соответственно. Одновременно те же покрытия были наблюдаемы подполковником Залесским в Ташкентской обсерватории в $21^{\text{h}} 55^{\text{m}} 19^{\text{s}},11$ и $22^{\text{h}} 1^{\text{m}} 44^{\text{s}},43$ соответственно. Определите разницу долгот между этими пунктами. Выразите ее в градусной мере. Какой из них находится западнее, а какой восточнее?

Решение:

Поскольку событие происходит в один и тот же момент времени, разница времен наблюдений и будет разницей долгот. Для 6992 Козерога она составит $27^{\text{m}} 28^{\text{s}},37$, а для β Козерога – $27^{\text{m}} 25^{\text{s}},73$. Или в градусной мере: $6^{\circ},868$ и $6^{\circ},857$. Среднее между ними будет $6^{\circ},863$. Или, округляя до двух значащих цифр: $6^{\circ},86$. Именно эта величина и будет являться разницей долгот. Поскольку соединения наблюдались ранее в Ташкенте, этот пункт находится восточнее.

Определение разницы долгот в градусах

6 баллов

Определение относительного положения по кругу широты

2 балла

№ 6. Гонки карликовых планет. Период обращения карликовой планеты Цереры составляет 4,6 лет, а Титана – 16 дней. Какая из планет пройдет большее расстояние по своей орбите за одни земные сутки? Массу Сатурна считать равной $5,68 \cdot 10^{26}$ кг.

Решение:

Для того, чтобы определить скорости движения планет по орбите, необходимо знать длину их орбит. Длина орбиты Цереры определяется тривиально из третьего закона Кеплера:

$$L_{\text{ц}} = 2\pi a_{\text{ц}} = 2\pi \sqrt[3]{T_{\text{ц}}^2} \approx 17,33 \text{ а. е.} = 2600 \text{ млн км}$$

Длину орбиты Титана можно определить из обобщенного III закона Кеплера:

$$L_T = 2\pi a_T = 2\pi^3 \sqrt{\frac{G T_T^2 M_\odot}{4\pi^2}} \approx 7,66 \text{ млн км}$$

Соответственно, скорости планет определяются как:

$$v_{Ц} = \frac{L_{Ц}}{T_{Ц}} \approx 18,6 \text{ км/с} \quad v_T = \frac{L_T}{T_T} \approx 5,6 \text{ км/с}$$

Следовательно, Церера пройдет большее расстояние.

Определение орбиты Цереры

4 балла

Определение орбиты Титана и сравнение скоростей

4 балла