Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Муниципальный этап

2018-2019

Решения. 11 класс

1. Определите, какой космический аппарат достигнет цели назначения быстрее: отправленный с Меркурия на Юпитер или запущенный с Земли на Плутон? Найдите расстояния, пройденные этими космическими аппаратами. Движение осуществляется по гомановскому эллипсу в обоих случаях.

   Решение

Движение по гомановскому эллипсу означает, что перицентр орбиты аппарата совпадает с большой полуосью планеты-пункта отправления, а апоцентр – планеты-пункта прибытия, по условиям задачи. Обратимся к справочным данным

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}38 \\ a_2 &= 5{,}20 \\ a_3 &= 1 \\ a_4 &= 30{,}06 \end{aligned}$$ а.е., где 1 – Меркурий, 2 – Юпитер, 3 – Земля, 4 – Нептун

Таким образом, у нас есть два космических аппарата, у которых

$$\begin{aligned} rp_1 &= a_1 = 0{,}38 \\ ra_1 &= a_2 = 5{,}20 \\ rp_2 &= a_3 = 1 \\ ra_2 &= a_4 = 30{,}06 \end{aligned}$$ а.е. (2 балла)

Найдем большие полуоси орбит космических аппаратов

$$A_1 = \frac{rp_1 + ra_1}{2} = 2{,}79$$
$$A_2 = \frac{rp_2 + ra_2}{2} = 15{,}53$$ а.е. (2 балла)

Определим периоды обращения по 3 закону Кеплера

$$\frac{T_1^2}{A_1^3} = 1 => T_1^2 = A_1^3 => T_1 = \sqrt{A_1^3} = 4{,}66$$
$$\frac{T_2^2}{A_2^3} = 1 => T_2^2 = A_2^3 => T_2 = \sqrt{A_2^3} = 61{,}2$$ лет (2 балла)

Время перелета от планеты к планете составит половину от периода обращения по гомановскому эллипсу, таким образом, с Меркурия на Юпитер лететь значительно быстрее

Найдем расстояния, которые пройдут космические аппраты:

$$P_1 = 4\frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)}{a_1 + b_1} \Rightarrow p_1 = 2\frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)}{a_1 + b_1}$$
$$P_2 = 4\frac{\pi a_2 b_2 + (a_2 - b_2)}{a_2 + b_2} \Rightarrow p_2 = 2\frac{\pi a_2 b_2 + (a_2 - b_2)}{a_2 + b_2}$$

, где P – периметры эллипсов, p – половина периметра, т.е. расстояния, которые пройдут космические аппараты, a – большая полуось эллипса, b – малая полуось эллипса.

Малые полуоси в общем случае неизвестны, выразим их из геометрии эллипса

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1} \Rightarrow e_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} \Rightarrow b_1 = \sqrt{a_1^2 - e_1^2 a_1^2}$$
$$e_2 = \frac{c_2}{a_2} \Rightarrow e_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}{a_2} \Rightarrow b_2 = \sqrt{a_2^2 - e_2^2 a_2^2}$$

Для решения задачи нам нужны эксцентриситеты. Вычислим их, зная большие полуоси и перицентрические расстояния, и вычислим малые полуоси

$$rp_1 = a_1(1 - e_1) \Rightarrow e_1 = 1 - \frac{rp_1}{a_1} = 0,86 \Rightarrow b_1 = 1,42$$
$$rp_2 = a_2(1 - e_2) \Rightarrow e_2 = 1 - \frac{rp_2}{a_2} = 0,93 \Rightarrow b_2 = 5,7$$

а.е.

Вычислим p_1 и p_2:

$$p_1 = 2\frac{\pi a_1 b_1 + (a_1 - b_1)}{a_1 + b_1} = 2\frac{\pi * 2,79 * 1,42 + (2,79 - 1,42)}{2,79 + 1,42} = 6,56$$
$$p_2 = 2\frac{\pi a_2 b_2 + (a_2 - b_2)}{a_2 + b_2} = 2\frac{\pi * 15,53 * 5,7 + (15,53 - 5,7)}{15,53 + 5,7} = 27,12$$

а.е. (2 балла)

2. В средствах массовой информации время от времени появляются новости, предупреждающие о том, что Солнце в ближайшее время перестанет излучать свет и тепло, что, очевидно, негативно отразится на жизни землян. Опишите методы астрофизических наблюдений, которые позволяют утверждать, что в ближайшие несколько тысяч лет (как минимум) существенных изменений в излучении Солнца не произойдет? Приведите примеры детекторов, использующихся в таких методах наблюдений?

Решение

Фотоны, которые покидают фотосферу Солнца, преодолевают 1 астрономическую единицу примерно за 8 минут. Это означает, что поток света и тепла достаточно быстро достигает Земли, если эти фотоны уже добрались до фотосферы.

Однако, для того, чтобы пересечь зону лучистого переноса внутри Солнца фотону может потребоваться от десятков тысяч лет до миллиона лет. Столь большой промежуток времени обусловлен постоянным поглощением и переизлучением света в зоне лучистого переноса (4 балла).

С другой стороны, в результате термоядерных реакций в недрах Солнца образуется устойчивый поток лептонов – электронных нейтрино. Электронные нейтрино практически не взаимодействует с веществом и стремительно проходят сквозь все оболочки Солнца и оперативно достигают Земли. Если в настоящий момент времени по какой-то причине термоядерные реакции в недрах Солнца прекратятся, достаточно быстро иссякнет поток электронных нейтрино, а вот родившиеся в недрах Солнца фотоны еще длительное время будут добираться до поверхности звезды (2 балла).

Таким образом, на нейтринных телескопах регистрируют поток нейтрино, а мощность этого потока характеризует темп термоядерных реакций в ядре звезды. Подобные наблюдения позволяют “заглянуть” в термоядерные реакции, минуя внешние оболочки Солнца. (2 балла за упоминания любых нейтринных телескопов).

3. Широты полярных кругов и тропиков, как известно, зависят от угла наклона плоскости экватора планеты относительно плоскости ее обращения вокруг звезды. Территории в Северном полушарии, расположенные одновременно южнее Северного полярного круга и севернее Северного тропика, называют умеренным поясом (симметричная ситуация есть и для южного полушария). Определите, при каком значении угла наклона плоскости экватора относительно плоскости орбиты планеты умеренный пояс будет иметь протяженность по широте всего 5 градусов? Угловыми размерами Солнца и атмосферными эффектами пренебречь.

   Решение

Угол наклона плоскости экватора Земли относительно плоскости эклиптики. Данный угол ответственен за изменение сезонов года на поверхности планеты и его же значение определяет широты тропиков и полярных кругов. (2 балла)

Определим, широты земных полярных кругов и тропиков

- Северный полярный круг: $\varphi_1 = 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 34'$
- Северный тропик (тропик Рака): $\varphi_2 = \varepsilon = 23^\circ 26'$
- Южный тропик (тропик Козерога): $\varphi_3 = -\varepsilon = -23^\circ 26'$
- Южный полярный круг: $\varphi 4 = -90^\circ + \varepsilon = -66^\circ 34$

Вполне очевидно, что $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 = \Delta\varphi$ - и есть протяженность умеренного пояса в обоих полушариях. (4 балла). Нам требуется, чтобы эта величина была равна 5 градусам. Рассмотрим задачу для одного полушария, для второго – ситуация симметричная

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 => \Delta\varphi = 90^\circ - \varepsilon_2 - \varepsilon_2 = 5^\circ => 90^\circ - 2\varepsilon_2 = 5^\circ => \varepsilon_2 = \frac{90-5}{2} = 42{,}5^\circ$$

Таким образом, угол наклона плоскости экватора относительно плоскости орбиты должен составлять 42,5 градуса.

4. Возможно ли, чтобы при движении по эллиптической орбите кинетическая энергия движения объекта в перигелии вчетверо превышала бы кинетическую энергию объекта в афелии?

Решение

Запишем кинетическую энергию в перицентре и апоцентре:

$$E_1 = \frac{m_1 V_1^{\ 2}}{2}$$
$$E_2 = \frac{m_1 V_2^{\ 2}}{2}$$

, где m_1 – масса объекта (постоянна). Далее, запишем формулы для перицентрической и апоцентрической скоростей

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}}$$
$$V_2 = \sqrt{\frac{GM(1-e)}{a(1+e)}}$$

, где G – гравитационная постоянная, M – масса Солнца, a – большая полуось, e – эксцентриситет (2 балла).

Нам известно, что $E_1=4E_2$

$$E_1 = 4E_2 => \frac{m_1 V_1^{\ 2}}{2} = 4\frac{m_1 V_2^{\ 2}}{2} => V_1^{\ 2} = 4V_2^{\ 2} => V_1 = 2V_2$$

$$V_1 = 2V_2 => \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}} == 2\sqrt{\frac{GM(1-e)}{a(1+e)}} => \frac{GM(1+e)}{a(1-e)} = 4\frac{GM(1-e)}{a(1+e)} => \frac{(1+e)}{(1-e)} = \frac{4(1-e)}{(1+e)}$$

(2 балла)

Запишем квадратное уравнение и решим его:

$$\frac{(1+e)}{(1-e)} = \frac{4(1-e)}{(1+e)} => (1+e)^2 = 4(1-e)^2 => 1+2e+e^2 = 4-8e+4e^2 => 3e^2-10e-3=0$$

В решении получаются два корня – e_1 = -3, e_2 = -0,3. (2 балла) Полученные эксцентриситеты не лежат в пределах от 0 до 1, что позволяет утверждать, что речь не об эллиптической орбите. Таким образом, на эллиптической орбите это невозможно (2 балла)

5. Исследователь древностей решил воссоздать доисторическую обсерваторию подручными средствами. В наличии у него 3 камня, которые необходимо установить следующим образом: первый должен отмечать восход Солнца в день зимнего солнцестояния, второй - в дни равноденствий, в третий - в день летнего солнцестояния. Как разместить их друг относительно друга, если необходимо, чтобы расстояние от камней до наблюдателя было одинаковым и равнялось 100 метрам? Широту места наблюдения принять равной широте Екатеринбурга. Угловыми размерами Солнца и атмосферными эффектами пренебречь.

Решение

Для того, чтобы решить эту задачу, необходимо определить азимуты восхода Солнца в 1) в день зимнего солнцестояния 2) в дни равноденствия 3) в день летнего солнцестояния.

В день зимнего солнцестояния, склонение Солнца будет равно $\delta_1 = -23^\circ 26'$, в дни равноденствий - $\delta_2 = 0^\circ$, в день летнего солнцестояния $\delta_3 = 23^\circ 26$. Если мы берем восход, не учитывая рефракцию и угловой размер диска Солнца, $h_1 = h_2 = h_3 = 0^\circ$. (2 балла)

По теореме косинусов для параллактического треугольника запишем,

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) * \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) * \sin(90^\circ - h) * \cos(A - 180^\circ) => h = 0 =>$$

$$\cos(90^\circ - \delta) = \sin(90^\circ - \varphi) * \cos(A - 180^\circ) => \cos(A - 180^\circ) = \frac{\cos(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - \varphi)}$$

Очень удобно, что это уравнение подходит для всех нужных нам положений. (2 балла)

Таким образом,

$$A_1 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ - \delta_1)}{\sin(90^\circ - \varphi)}\right) + 180 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ + 23^\circ 26')}{\sin(90^\circ - 56^\circ)}\right) + 180 \approx 315^\circ$$

$$A_2 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ - \delta_2)}{\sin(90^\circ - \varphi)}\right) + 180 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ)}{\sin(90^\circ - 56^\circ)}\right) + 180 \approx 270^\circ$$

$$A_3 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ - \delta_3)}{\sin(90^\circ - \varphi)}\right) + 180 = \arccos\left(\frac{\cos(90^\circ - 23^\circ 26')}{\sin(90^\circ - 56^\circ)}\right) + 180 \approx 225^\circ$$

(2 балла)

Теперь нам нужно расположить камни друг относительно друга. Они должны находиться на одинаковом от нас расстоянии, т.е. стоять на одной окружности с радиусом 100 метров и на угловом удалении 45 градусов друг от друга.

Периметр окружности $L = 2\pi R \approx 630$ метров, соответственно, мы должны поставить их друг от друга на расстоянии чуть меньше, чем 80 метров, если считать по друге окружности. (2 балла)

6. Если на место Солнца поместить самый массивный из возможных белых карликов, то какова будет его видимая звездная величина при наблюдении с Земли? Считать, что средняя плотность белых карликов в 10 миллионов раз превышает плотность воды.

Решение

Самый массивный белый карлик может иметь массу 1,44 массы Солнца (предел Чандрасекара) (3 балла). Исходя из дано, плотность белого карлика – 1 млн тонн на 1 м^3.

Найдем объем белого карлика, а из него – радиус.

$$M = \rho * V \Rightarrow 1{,}44 * 2 * 10^{30}\,кг = 10^9\,\frac{кг}{м^3} * V \Rightarrow V = \frac{2{,}88 * 10^{30}\,кг}{10^9\,\frac{кг}{м^3}} = 2{,}88 * 10^{21}\,м^3$$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 8{,}8 * 10^6\,м$ (2 балла)

Запишем светимость белого карлика (1) и Солнца (2):

$$L_1 = 4\pi R_1^{\,2} \sigma T_1^{\,4}$$
$$L_2 = 4\pi R_2^{\,2} \sigma T_2^{\,4}.$$

Найдем отношение

$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi R_1^{\ 2}\sigma T_1^{\ 4}}{4\pi R_2^{\ 2}\sigma T_2^{\ 4}} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1^{\ 2} T_1^{\ 4}}{R_2^{\ 2} T_2^{\ 4}}$. Видимые звездные величины будут связаны соотношением формулы Погсона $\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{\ m_2 - m_1}$, а светимости и освещенности связаны $\begin{matrix} E_1 = \frac{L_1}{4\pi d_1^{\ 2}} \\ E_2 = \frac{L_2}{4\pi d_2^{\ 2}} \end{matrix}$. Таким образом, учитывая, что расстояния до светил можно принять равными $\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1} = \frac{\frac{L_1}{4\pi d_1^{\ 2}}}{\frac{L_2}{4\pi d_2^{\ 2}}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1^{\ 2} T_1^{\ 4}}{R_2^{\ 2} T_2^{\ 4}}$. (2 балла) Оставим только то, что нам нужно и добавим температуру белого карлика – около 100 000 Кельвинов:

$$\frac{R_1^{\ 2} T_1^{\ 4}}{R_2^{\ 2} T_2^{\ 4}} = 2{,}512^{m_2 - m_1} \Rightarrow \log\left(\frac{R_1^{\ 2} T_1^{\ 4}}{R_2^{\ 2} T_2^{\ 4}}\right) = 0{,}4(m_2 - m_1) \Rightarrow m_2 = \frac{\log\left(\frac{R_1^{\ 2} T_1^{\ 4}}{R_2^{\ 2} T_2^{\ 4}}\right)}{0{,}4} + m_1 =$$

(4 балла)

$$\frac{\log\left(\frac{\left(7*10^8\right)^2 * 6000^4}{\left(8{,}8*10^6\right)^2 * 100000^4}\right)}{0{,}4} - 26{,}8 \approx 24{,}5^m$$

Критерии оценивания

муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по астрономии 2018-2019 учебного года

В соответствием с «Методическими рекомендациями по разработке требований к проведению школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по астрономии в 2018/2019 учебном году» решение каждой из задач оценивается по 8-балльной системе (от 0 до 8 баллов). Премиальные оценки (выше 8 баллов) на данных этапах олимпиады не предусмотрены. Итоговая оценка за весь этап составляет от 0 до 48 баллов для параллелей 9-11 классов и от 0 до 32 баллов для 7-8 классов.

Количество баллов за правильное решение задачи указано после условия задачи. При проверке заданий рекомендуется оценивать максимальным количеством баллов только абсолютно правильные решения, сопровождаемые объяснением, обоснованием, при необходимости, рисунком.

Снижение оценки предусматривается в случае частичного выполнения задания (соответственно проценту его выполнения).

В то же время специфика проблем, поднятых в задачах должна приводить к тому, что если участник показал эрудицию в поставленных вопросах, даже не решив задачи - его можно поощрить 1 – 2 баллами. 0 баллов ставится либо при полном отсутствии решения, либо при полном отсутствии полезной информации по теме задачи.

Снижение оценки на 1 – 3 балла рекомендуется в случае нерационального решения задачи, использования нетрадиционных методов вычислений, единиц, размерностей, что часто встречается в задачах по астрономии.

Представляется важным для обеспечения одинакового подхода к оценке выполнения заданий, чтобы каждое задание проверялось двумя членами жюри, независимо, и выставлялся суммарный балл.

В соответствии с Положением о всероссийской олимпиаде школьников, победителем муниципального этапа Олимпиады считается участник, набравший наибольшее количество баллов в своей возрастной параллели. Призерами считаются участники, идущие в итоговой таблице за победителями.