

11 класс

Задача № 1.

Существуют ли на Земле места, в которых бывает полярный день и не бывает полярной ночи? Ответ обоснуйте. Если такие места существуют, то укажите их географические координаты.

Решение.

Определимся с терминами. Полярный день – промежуток времени равный или более одних суток, в течение которого хотя бы какая-то часть Солнца видна над горизонтом. Полярная ночь – промежуток времени равный или более одних суток, в течение которого никакая часть Солнца не видна над горизонтом.

Достаточно известно, что полярные дни и ночи бывают в приполярных областях, ограниченных северным и южным полярными кругами. Широты северного и южного полярных кругов равны $+66,5^\circ$ ($90^\circ - \varepsilon \approx 66,5^\circ$) и $-66,5^\circ$ ($-90^\circ + \varepsilon \approx -66,5^\circ$) соответственно. Далее будем рассматривать ситуацию только в северном полушарии, а для южного дадим ответ из соображений симметрии.

На широте северного полярного круга в полночь в день летнего солнцестояния (склонение Солнца максимально и равно ε) и в полдень в день зимнего солнцестояния (когда склонение Солнца минимально и равно $-\varepsilon$) центр диска Солнца находится точно на горизонте. Однако при этом необходимо учесть, что Солнце имеет вполне заметные (около $0,5^\circ$) угловые размеры и когда его центр находится на горизонте, половина светила видна над ним. Также существует атмосферная рефракция, которая «поднимает» светила выше над горизонтом (у горизонта рефракция составляет порядка $0,6^\circ$).

Таким образом, возможна ситуация, при которой летом полярный день есть, а зимой полярной ночи нет, так как из-за заметных угловых размеров или рефракции некоторая часть Солнца видна над горизонтом.

Край солнечного диска отстоит от его центра примерно на $0,25^\circ$, значит область, где возможны полярные дни, но нет полярных ночей, представляет собой полосу на поверхности Земли с центральной линией - на северном полярном круге и шириной около $0,5^\circ$.

Рефракция, увеличивающая высоту Солнца над горизонтом, расширяет эту полосу к северу и югу ещё на $0,6^\circ$. В дополнительной полосе севернее полярная ночь во время зимнего солнцестояния превращается в обычную — рефракция приподнимает Солнце так, что оно становится хотя бы частично видимым над горизонтом. В дополнительной полосе шириной южнее обычная ночь во время летнего солнцестояния пропадает — рефракция приподнимает Солнце так, что оно становится хотя бы частично видимым над горизонтом в течение всех суток.

Тогда получаем, что указанные в условии области существуют, и представляют собой полосы шириной $1,7^\circ$, центральные линии которых совпадают с северным и южным полярными кругами.

Ответ: $65,65^\circ \lesssim \varphi \lesssim 67,35^\circ$ в северном полушарии и $-67,35^\circ \lesssim \varphi \lesssim -65,65^\circ$ в южном полушарии.

Задача № 2.

Что ярче полная Земля, наблюдаемая с Луны, или полная Луна, наблюдаемая с Земли? На сколько звездных величин? Считайте, что атмосфера Земли прозрачна для падающего и отражённого излучения.

Решение.

При решении данной задачи можно считать, что расстояния от Солнца до Земли и до Луны одинаковы, значит, равны и падающие на единицу поверхности соответствующего тела световые потоки. В то время как количества отражённого света прямо пропорциональны площадям отражающих поверхностей и соответствующим альбедо.

Отношение радиусов Земли и Луны равно

$$\frac{R_{\oplus}}{R_{\zeta}} = \frac{6368 \text{ км}}{1738 \text{ км}} \approx 3,7$$

где R_{\oplus} - средний радиус Земли (вычислен как среднее арифметическое полярного и экваториального радиусов Земли из перечня справочных данных), а R_{ζ} - радиус Луны (из перечня справочных данных).

Отношение отражающих площадей равно квадрату этой величины

$$\frac{S_{\oplus}}{S_{\zeta}} = (3,7)^2 \approx 13,7$$

Отношение альбедо Земли и Луны (из перечня справочных данных)

$$\frac{A_{\oplus}}{A_{\zeta}} = \frac{0,37}{0,12} \approx 3,1$$

Тогда отношение отраженных световых потоков

$$\frac{I_{\oplus}}{I_{\zeta}} = 13,7 \cdot 3,1 = 42,47$$

Воспользовавшись законом Пюгсона, вычислим разницу видимых звёздных величин

$$m_{\oplus} - m_{\zeta} = -2,5 \cdot \lg(42,47) \approx -4^m$$

То есть Земля ярче Луны примерно на четыре звёздных величины.

Следует отметить, что в реальности альбедо Земли сильно зависит от состояния атмосферы и в случае высокой облачности отражающая способность возрастает. В таком случае модуль вычисленной разности будет ещё больше.

Ответ: ярче полная Земля примерно на четыре звёздные величины.

Задача № 3.

Оцените максимально возможное и минимально возможное значение периода обращения тела, принадлежащего Солнечной системе.

Решение.

Запишем третий закон Кеплера в обобщённом виде

$$\frac{a^3}{T^2 \cdot (M + m)} = \frac{G}{4 \cdot \pi^2}$$

где $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ — гравитационная постоянная (из перечня справочных данных), m — масса тела, T — относительный период обращения тел, $M = M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ — масса Солнца (из перечня справочных данных). Поскольку масса тела много меньше массы Солнца ($m \ll M_{\odot}$), то ею можно пренебречь, тогда получим

$$\frac{a^3}{T^2 \cdot M} = \frac{G}{4 \cdot \pi^2}$$

Если a выразить в астрономических единицах, T в годах, а M в массах Солнца, то

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

или

$$T = \sqrt{a^3}$$

Минимальный период, соответствующий минимальной большой полуоси орбиты, определяется тем, что тело должно находиться вне Солнца — большая полуось его орбиты должна быть больше радиуса Солнца. Радиус Солнца выразим в астрономических единицах

$$R_{\odot} = \frac{6,97 \cdot 10^8}{1,496 \cdot 10^{11}} \approx 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ а. е.}$$

Тогда

$$T_{min} = \sqrt{a_{min}^3} = \sqrt{(4,66 \cdot 10^{-3})^3} \approx 3,18 \cdot 10^{-4} \text{ лет} \approx 2,79 \text{ часа}$$

Максимальный период, соответствующий максимальной большой полуоси орбиты, определяется тем, что тело не должно удаляться от Солнца на расстояние, превышающее примерно половину расстояния до ближайших звезд. В противном случае в окрестности афелия такое тело будет испытывать существенные возмущения со стороны этих звезд и с большой вероятностью покинет Солнечную систему.

Можно также учесть, что наблюдаемые долгопериодические кометы движутся по очень сильно вытянутым орбитам, поэтому максимальное расстояние, на которое наше тело сможет удаляться от Солнца, практически равно удвоенной большой полуоси орбиты.

Ближайшая к Солнцу звезда — α Кентавра находится на расстоянии **1,33** пк, поэтому примем в качестве оценки максимально возможной большой полуоси

$$a_{max} = \frac{1,33 \text{ пк}}{2} = 0,665 \text{ пк} \approx 137\,166 \text{ а. е.}$$

Тогда

$$T_{max} = \sqrt{a_{max}^3} = \sqrt{(137\,166)^3} \approx 5,1 \cdot 10^7 \text{ лет}$$

Ответ: минимальный период около **2,79** часа; максимальный период около **51** миллиона лет.

Задача № 4.

Из **60** звёзд подобных Солнцу создали один голубой гигант главной последовательности. Оцените светимость такой звезды, если её средняя плотность составляет одну десятую от средней плотности Солнца, а температура поверхности порядка **60 000 K**.

Решение.

Согласно закону Стефана-Больцмана светимость единицы площади абсолютно чёрного тела

$$L = \sigma \cdot T^4$$

Значит сферическое абсолютно чёрное тело излучает

$$L = \sigma \cdot T^4 \cdot S$$

где $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$ – площадь сферы. Тогда

$$L = 4 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot T^4$$

Звезду с хорошим приближением можно считать абсолютно чёрным телом. Значит светимость звезды определяется температурой её поверхности и радиусом. Запишем отношение светимостей указанной звезды и Солнца

$$\frac{L_*}{L_{\odot}} = \left(\frac{R_*}{R_{\odot}}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_*}{T_{\odot}}\right)^4$$

где символ $*$ относится к звезде, а символ \odot к Солнцу.

Так как мы имеем дело с голубым гигантом, лежащим на главной последовательности, то температура его поверхности порядка **60 000 K** (у Солнца **5 800 K** \approx **6 000 K** – из перечня справочных данных). Найдём отношение радиуса такой звезды к радиусу Солнца. Так как масса звезды стала в **60** раз больше, а плотность в **10** раз меньше, то её объём по отношению к объёму Солнца

$$\frac{V_*}{V_{\odot}} = \frac{R_*^3}{R_{\odot}^3}$$

с другой стороны

$$\frac{V_*}{V_{\odot}} = \frac{m_* \cdot \rho_{*cp}}{m_{\odot} \cdot \rho_{\odot cp}}$$

Приравнявая, получим

$$\frac{R_*}{R_{\odot}} = \sqrt[3]{\frac{m_* \cdot \rho_{*cp}}{m_{\odot} \cdot \rho_{\odot cp}}}$$

Подставим в формулу для светимостей

$$\frac{L_*}{L_{\odot}} = \left(\frac{m_* \cdot \rho_{* \text{cp}}}{m_{\odot} \cdot \rho_{\odot \text{cp}}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{T_*}{T_{\odot}} \right)^4$$

Учитывая, что

$$\frac{m_*}{m_{\odot}} = 60$$

$$\frac{\rho_{* \text{cp}}}{\rho_{\odot \text{cp}}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{T_*}{T_{\odot}} = 10$$

Окончательно получим

$$\frac{L_*}{L_{\odot}} = \left(\frac{60}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot (10)^4 \approx 878 \approx 900$$

То есть светимость полученной звезды составляет примерно **900** светимостей Солнца.

Ответ: примерно **900** светимостей Солнца.

Задача № 5.

Масса чёрной дыры в центре галактики **M87** составляет около $4 \cdot 10^9$ масс Солнца, а расстояние до неё **16,4** Мпк. Эту чёрную дыру наблюдают при помощи космического интерферометра, максимально возможное расстояние между антеннами которого **300** тысяч километров. Вычислите длину волны, на которой должен вести наблюдение интерферометр, чтобы «увидеть диск» чёрной дыры.

Решение.

Чтобы «увидеть» чёрную дыру предельное угловое разрешение интерферометра должно быть меньше наблюдаемых угловых размеров чёрной дыры.

Предельное угловое разрешение интерферометра (в радианах) можно оценить с помощью формулы

$$\alpha = \frac{\lambda}{d}$$

где λ – рабочая длина волны, а d – база интерферометра (максимально возможное расстояние между антеннами).

Угловые размеры черной дыры в центре галактики **M87** можно получить как

$$\gamma = \frac{2 \cdot R}{D}$$

где R – радиус чёрной дыры, а D – расстояние до неё.

Под радиусом чёрной дыры понимается её гравитационный радиус (он же радиус Шварцшильда)

$$R = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$$

где $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная (из перечня справочных материалов), M – масса чёрной дыры, а $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света в вакууме. Это выражение можно получить, считая, что параболическая (вторая космическая) скорость на поверхности черной дыры равна световой.

Тогда по условию задачи

$$\alpha < \gamma$$

$$\frac{\lambda}{d} < \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot D}$$

откуда

$$\lambda < \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2} \cdot \frac{d}{D}$$

Подставляя численные данные, имеем

$$\lambda < \frac{4 \cdot 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 4 \cdot 10^9 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м}}{(2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 \cdot 16,4 \cdot 10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ м}} \approx 1,4 \text{ см}$$

то есть

$$\lambda < 1,4 \text{ см}$$

Ответ: менее 1,4 см.

Задача № 6.

Скопление галактик, включающее Млечный путь, движется со скоростью около **630** км/с относительно реликтового фона. Какую абсолютную погрешность измерения температуры реликтового излучения должны иметь наши приборы, чтобы заметить это движение?

Решение.

Воспользуемся для оценки температуры положением максимума в спектре излучения. Известен закон смещения Вина

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

где λ_{max} – длина волны излучения с максимальной интенсивностью, T – абсолютная температура, а b – постоянная Вина.

Если записать эту же формулу для частоты излучения (учитывая, что $\lambda = \frac{c}{\nu}$), получим

$$v_{max} = \frac{c}{b} \cdot T$$

Реликтовое излучение является чернотельным с температурой около **2,7 К** (нужно знать). При движении относительно реликтового фона максимум излучения сдвигается из-за эффекта Доплера и, как следствие, меняется его температура. То есть

$$v_{max \text{ источн}} = \frac{c}{b} \cdot T_{\text{источн}}$$

$$v_{max \text{ приёмн}} = \frac{c}{b} \cdot T_{\text{приёмн}}$$

Тогда вычитая, получим

$$v_{max \text{ приёмн}} - v_{max \text{ источн}} = \frac{c}{b} \cdot (T_{\text{приёмн}} - T_{\text{источн}})$$

учитывая, что

$$v_{max \text{ приёмн}} - v_{max \text{ источн}} = \Delta v_{max}$$

$$T_{\text{приёмн}} - T_{\text{источн}} = \Delta T$$

получаем

$$\Delta v_{max} = \frac{c}{b} \cdot \Delta T$$

Эффект Доплера заключается в смещении спектра излучения в том случае если источник движется относительно наблюдателя. Если относительная скорость источника и наблюдателя много меньше скорости света, то для вычисления скорости по сдвигу спектра излучения применяется следующая формула:

$$v_{\text{приёмн}} = v_{\text{источн}} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

где $v_{\text{приёмн}}$ – частота принимаемого излучения, $v_{\text{источн}}$ – частота излучения источника, v – величина относительной скорости источника и приёмника, $c = 2,998 \cdot 10^5$ км/с – скорость света в вакууме (из перечня справочных данных).

Вычтем из обеих частей $v_{\text{источн}}$

$$v_{\text{приёмн}} - v_{\text{источн}} = v_{\text{источн}} \cdot \frac{v}{c}$$

учитывая, что

$$v_{\text{приёмн}} - v_{\text{источн}} = \Delta v$$

$$v_{\text{источн}} = v$$

получаем

$$\Delta v = v \cdot \frac{v}{c}$$

Применим эту формулу к нашему случаю (это можно сделать, так как **630 км/с** \ll **2,998 · 10⁵ км/с**). Тогда получаем

$$\Delta v_{max} = v_{max} \cdot \frac{v}{c}$$

Подставим сюда выражения для Δv_{max} и v_{max} , имеем

$$\Delta T = \frac{v}{c} \cdot T$$

Подставляем численные данные

$$\Delta T = \frac{630 \frac{\text{км}}{\text{с}}}{2,998 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \cdot 2,7 \text{ К} \approx 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ К}$$

То есть абсолютная погрешность наших приборов не должна превосходить эту величину.

Ответ: не более $5,7 \cdot 10^{-3} \text{ К}$.

Перечень справочных данных.

Основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$

Скорость света в вакууме $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

Универсальная газовая постоянная $R = 8.31 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$

Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$

Постоянная Планка $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$

Масса протона $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Масса электрона $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

Элементарный заряд $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

Астрономическая единица $1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$

Парсек $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а. е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Постоянная Хаббла $H = 72 \text{ (км/с)/Мпк}$

Данные о Солнце

Радиус **697 000 км**

Масса **$1.989 \cdot 10^{30}$ кг**

Светимость **$3.88 \cdot 10^{26}$ Вт**

Спектральный класс **G2**

Видимая звездная величина – **26.78^m**

Абсолютная болометрическая звездная величина **$+4.72^m$**

Показатель цвета (B–V) **$+0.67^m$**

Эффективная температура **5800 К**

Средний горизонтальный параллакс **$8.794''$**

Интегральный поток энергии на расстоянии Земли **1360 Вт/м²**

Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли **600 Вт/м²**

Данные о Земле

Эксцентриситет орбиты **0.0167**

Тропический год **365.24219 суток**

Средняя орбитальная скорость **29.8 км/с**

Период вращения **23 часа 56 минут 04 секунды**

Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000 года: **$23^\circ 26' 21.45''$**

Экваториальный радиус **6378.14 км**

Полярный радиус **6356.77 км**

Масса **$5.974 \cdot 10^{24}$ кг**

Средняя плотность **$5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$**

Объемный состав атмосферы: **N_2 (78%), O_2 (21%), Ar (~1%).**

Данные о Луне

Среднее расстояние от Земли **384400** км

Минимальное расстояние от Земли **356410** км

Максимальное расстояние от Земли **406700** км

Средний эксцентриситет орбиты **0.055**

Наклон плоскости орбиты к эклиптике **5° 09'**

Сидерический (звездный) период обращения **27.321662** суток

Синодический период обращения **29.530589** суток

Радиус **1738** км

Масса **$7.348 \cdot 10^{22}$** кг или **1/81.3** массы Земли

Средняя плотность **$3.34 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$**

Визуальное геометрическое альbedo **0.12**

Видимая звездная величина в полнолуние – **12.7^m**

Видимая звездная величина в первой/последней четверти – **10.5^m**

Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометр. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	697000	109.3	1.41	25.380 сут	7.25	–	–26.8
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	–0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут**	177.36	0.65	–4.4
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	–2.0
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	–2.7
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	26.73	0.47	0.4
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час**	97.86	0.51	5.7
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8

* – для наибольшей элонгации внутренних планет и среднего противостояния внешних планет.

** – обратное вращение.

Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн.км	а.е.				
				градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	—
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альbedo	Видимая звездная величина*
	кг	км	г/см ³	км	сут		m
Земля							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
Марс							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
Юпитер							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
Сатурн							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.2	~11.0
Уран							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
Нептун							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685**	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет.

** – обратное направление вращения.

Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(\alpha + x) \approx \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha + x) \approx \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + x) \approx \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x;$$

($x \ll 1$, углы выражаются в радианах).