<u>*11 класс*</u>

<u>*1. Высота зонда Gaia*</u>

Астрометрический зонд Gaia обращается вокруг Солнца, постоянно находясь вблизи т.н. точки Лагранжа **L2** системы «Солнце-Земля». Оцените, на какой высоте над горизонтом происходит верхняя кульминация зонда 21 декабря в г.Кострома (φ=57°46' с.ш., λ=40°56' в.д.)? Атмосферную рефракцию и суточный параллакс зонда не учитывать.

<u>**Решение:**</u>

Для решения задачи необходимо иметь представление о точках либрации и их расположении в пространстве. Точки Лагранжа являются частным случаем т.н. ограниченной задачи трех тел, когда в системе присутствует два массивных тела и один объект, массой которого можно пренебречь по сравнению с массами двух первых объектов. В этом случае третье маломассивное тело может неподвижно располагаться относительно первых двух массивных объектов, если будет находиться в одной из пяти либрационных точек.

Две из этих точек – **L4** и **L5** – носят название треугольных. Вместе с двумя массивными телами системы эти точки образуют равносторонние треугольники. В системе «Солнце-Земля» они располагаются на орбите нашей планеты, опережая и отставая от самой Земли на 60° по эклиптической долготе. Положение третьего маломассивного тела в треугольных точках либрации устойчиво.

Три другие точки Лагранжа – **L1, L2** и **L3** – носят название коллинеарных и лежат на одной прямой, проходящей через два массивных тела системы. Либрационная точка **L1** располагается между двумя массивными телами системы, находясь при этом ближе к объекту меньшей массы. Точка **L2** находится по одну сторону от обоих массивных объектов, располагаясь при этом за телом с меньшей массой. Точка Лагранжа **L3** находится по другую сторону от обоих массивных объектов, располагаясь, соответственно, за телом с большей массой. Положение третьего маломассивного тела в коллинеарных точках либрации неустойчиво, и любые небольшие внешние возмущения могут нарушить это хрупкое равновесие.

Исходя из этого, а также условий задачи, следует, что зонд Gaia находится примерно на одной линии, проходящей через Солнце и Землю, располагаясь при этом в антисолнечном направлении. 21 декабря Солнце находится в точке зимнего солнцестояния и имеет склонение δ=−23°27'. Соответственно, зонд Gaia в этот день находится на небе в районе точки летнего солнцестояния, имея склонение δ≈+23°.

Верхняя кульминация космического зонда в г.Кострома происходит в это время к югу от зенита на высоте, равной примерно:

$$\mathbf{h = 90° - \varphi + \delta = 90° - 58° + 23° = 55°}$$

В данном расчете не стоит стремиться к большой точности вычисления, а некоторые цифры вполне можно округлить, как мы и поступили с широтой пункта наблюдения и склонением объекта. Это связано с тем, что зонд никогда не располагается точно в точке **L2**, совершая в пространстве очень сложные движения и колебания вокруг нее.

<u>*2. «Нейтринный блеск» Солнца*</u>

Энергия в недрах Солнца выделяется в основном в результате так называемого протон-протонного (водородного) цикла, в результате которого четыре ядра водорода (протона) в результате определенной последовательной цепочки реакций превращаются в одно ядро гелия (альфа-частицу). В ходе каждой подобной реакции испускаются также два нейтрино, которые практически беспрепятственно покидают пределы Солнца и уносятся в окружающее космическое пространство. Оцените, какое количество нейтрино ежесекундно пролетает через квадратный метр земной поверхности, ориентированной в данный момент перпендикулярно направлению на Солнце. Радиус орбиты Земли принять равным 150 млн. км. Светимость Солнца равна $3{,}828\cdot10^{26}$ Вт. Масса протона равна $1{,}673\cdot10^{-27}$ кг, а масса альфа частицы $6{,}645\cdot10^{-27}$ кг.

<u>**Решение:**</u>

Вычислим количество энергии, вырабатываемой в ходе каждой цепочки реакции протон-протонного цикла:

$$E_o = \Delta mc^2 = (4m_p - m_\alpha)c^2 = (4 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} - 6{,}645 \cdot 10^{-27}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \sim 4{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ Äæ}$$

где $\Delta\mathbf{m}$ – т.н. дефект масс, равный в нашем случае разнице между массой четырех протонов и массой одной альфа частицы, образующейся при слиянии первых.

Определим, сколько в ядре Солнца в среднем за секунду происходит реакций превращения четырех протонов в одно ядро гелия, для чего просто поделим светимость Солнца на энерговыделение одной цепочки реакций, которое мы вычислили ранее.

$$N_{reactions} = \frac{L_{Sun}}{E_o} = \frac{3{,}828 \cdot 10^{26}}{4{,}2 \cdot 10^{-12}} \sim 9 \cdot 10^{37}$$

Т.к. в ходе каждой такой реакции выделяется два нейтрино, то общее количество нейтрино, вырабатываемых в недрах Солнца за секунду, будет равно удвоенному количеству таких реакций:

$$N_{neutrino} = 2 \cdot N_{reactions} \sim 1{,}8 \cdot 10^{38}$$

Вырабатываемое в солнечном ядре нейтрино, как и электромагнитное излучение, испускается Солнцем изотропно, т.е. равномерно во всех направлениях. Соответственно, то количество этих частиц, которое испускается нашей звездой за одну секунду, можно мысленно равномерно распределить по площади сферы, радиус которой равен радиусу земной орбиты.

Тогда искомая величина составит:

$$E_{neutrino} = \frac{N_{neutrino}}{4\pi R^2} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{38}}{4\pi\left(1{,}5 * 10^{11}\right)^2} \sim 6 \cdot 10^{14} \quad \text{нейтрино/(м}^2 \cdot \text{сек)}$$

3.Солнце в зените и надире

Весеннее равноденствие 2021г. произошло 20 марта в 09:37 по всемирному времени. Найдите географические координаты пунктов на земной поверхности, где Солнце в этот момент было в зените и надире. Уравнение времени в этот день было равно η = +7 m.

Решение:

Проще всего сначала определить широты этих мест. Т.к. в момент равноденствия центр Солнца оказывается в плоскости земного экватора, то очевидно, что широты искомых пунктов равны нулю, т.е. они располагаются на экваторе нашей планеты.

Теперь найдем долготу места, где Солнце в момент равноденствия располагалось в зените. Среднее солнечное время $\mathbf{T_{ср}}$ какого либо меридиана с долготой $\boldsymbol{\lambda}$ равно:

$$T_{ср} = T_o + \lambda$$

где $\mathbf{T_o}$ – всемирное время.

Истинное солнечное время $\mathbf{T_{ист}}$ связано со средним солнечным временем следующим соотношением:

$$T_{ист} = T_{ср} - \eta$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – уравнение времени.

С учетом первого выражения, второе равенство можно представить в виде:

$$T_{ист} = T_o + \lambda - \eta$$

В нашем искомом пункте с долготой $\boldsymbol{\lambda}$ Солнце должно находиться в верхней кульминации, т.е. на этом меридиане истинное солнечное время должно быть равно точно 12 часам. С учетом этого выразим долготу из последней формулы и найдем ее значение:

$$\lambda = 12^h - T_o + \eta = 12^h - 09^h\,37^m + 7^m = 02^h\,30^m = 37{,}5° \text{ в.д.}$$

В надире в этот момент Солнце будет в диаметрально противоположной по долготе точке земного шара, т.е. на 142,5° з.д.

4. Состав звезд

В первом приближении можно считать, что звезды по массе состоят на 76% из ядер водорода (протонов) и на 24% из ядер гелия (альфа-частиц). Каков процент содержания в звездах этих сортов частиц по их количеству? Считать, что ядра гелия в 4 раза тяжелее ядер водорода.

Решение:

Пусть в звезде содержится $\mathbf{n_H}$ частиц ядер водорода и $\mathbf{n_{He}}$ частиц ядер гелия. Массу протона и альфа-частицы обозначим, соответственно, через $\mathbf{m_H}$ и $\mathbf{m_{He}}$. Тогда общая масса водорода в звезде Солнце будет равна $\mathbf{m_H \cdot n_H}$, а общая масса гелия – $\mathbf{m_{He} \cdot n_{He}}$.

В таком случае, согласно условию, можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{n_H \cdot m_H}{n_H \cdot m_H + n_{He} \cdot m_{He}} = 0{,}76 \\ \dfrac{n_{He} \cdot m_{He}}{n_H \cdot m_H + n_{He} \cdot m_{He}} = 0{,}24 \end{cases}$$

Примем условно массу протона за единицу, тогда масса ядра гелия, согласно условию, будет равна четырем единицам. Таким образом, $\mathbf{m_H=1}$, $\mathbf{m_{He}=4}$.

С учетом этого, наша система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{n_H}{n_H + 4n_{He}} = 0{,}76 \\ \dfrac{4n_{He}}{n_H + 4n_{He}} = 0{,}24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_H = 0{,}76(n_H + 4n_{He}) \\ 4n_{He} = 0{,}24(n_H + 4n_{He}) \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{n_H}{4n_{He}} = \frac{0{,}76}{0{,}24} = k$$

$$n_H = k \cdot 4n_{He}$$

Доля протонов по их количеству в веществе звезды с учетом последнего равенства составит:

$$\frac{n_H}{n_H + n_{He}} = \frac{n_H}{n_H + \dfrac{n_H}{4k}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{4k}} = \frac{4k}{4k+1} = 0{,}93 = 93\%$$

На долю же ядер гелия остается, соответственно, 7%. Или же это можно посчитать аналогичным образом:

$$\frac{n_{He}}{n_H + n_{He}} = \frac{n_{He}}{4n_{He} \cdot k + n_{He}} = \frac{1}{4k+1} = \frac{4k}{4k+1} = 0{,}07 = 7\%$$

5. Массы звезд в двойной системе

Астрономы наблюдают некоторую спектрально-двойную звезду, лучевые (радиальные) скорости компонентов которой, как это было установлено из спектральных наблюдений, составляют 4,2 км/сек и 8,4 км/сек. Из наблюдений также было установлено, что период обращения компонентов вокруг общего центра масс 59 годам. Считая, что компоненты двойной звезды движутся вокруг общего центра масс по круговым орбитам, определите нижний предел массы каждой из звезд, составляющих данную двойную систему.

Решение:

Пусть наклон орбитальной плоскости компонентов двойной звезды к картинной плоскости равен **i**. Тогда пространственные скорости звезд $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$ будут связаны с их лучевыми скоростями $\mathbf{V_{r1}}$ и $\mathbf{V_{r2}}$ следующими соотношениями:

$$V_1 = \frac{V_{r1}}{\sin i} \qquad V_2 = \frac{V_{r2}}{\sin i} \qquad (1)$$

В то же время пространственные скорости компонентов можно выразить как:

$$V_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \qquad V_2 = \frac{2\pi r_2}{T} \qquad (2)$$

где $\mathbf{T}$ – период обращения компонентов вокруг общего центра масс, а $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ – радиусы орбит первого и второго компонентов.

Из выражений (2) следует:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{V_1}{V_2} \qquad (3)$$

Радиусы орбит (расстояния от центра масс) компонентов обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (4)$$

Воспользуемся третьим уточненным законом Кеплера:

$$\frac{T^2(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G} \qquad (5)$$

Выразим радиусы орбит компонентов из равенств (2) и подставим их в выражение для третьего закона Кеплера (5):

$$\frac{T^2(m_1 + m_2)}{\left(\frac{TV_1}{2\pi} + \frac{TV_2}{2\pi}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

$$\frac{T^2(m_1 + m_2)}{\frac{T^3}{8\pi^3}(V_1 + V_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G}$$

Откуда сумма масс компонентов равна:

$$m_1 + m_2 = \frac{T(V_1 + V_2)^3}{2\pi G} \qquad (6)$$

С учетом выражений (1) для лучевых скоростей равенство (6) примет вид:

$$m_1 + m_2 = \frac{T(V_{r1} + V_{r2})^3}{2\pi G \sin^3 i} \qquad (7)$$

Из выражений (1), (3) и (4) следует, что:

$$\frac{V_{r1}}{V_{r2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Выразим из последнего равенства массу второго компонента **m2** и подставим ее значение в выражение (7):

$$m_1 + \frac{m_1 V_{r1}}{V_{r2}} = \frac{T(V_{r1} + V_{r2})^3}{2\pi G \sin^3 i}$$

$$m_1 \left(1 + \frac{V_{r1}}{V_{r2}}\right) = \frac{T(V_{r1} + V_{r2})^3}{2\pi G \sin^3 i}$$

$$m_1 \left(\frac{V_{r1} + V_{r2}}{V_{r2}}\right) = \frac{T(V_{r1} + V_{r2})^3}{2\pi G \sin^3 i}$$

Откуда масс первого компонента равна:

$$m_1 = \frac{T V_{r2} (V_{r1} + V_{r2})^2}{2\pi G \sin^3 i}$$

Аналогичным образом масса второго компонента будет равна:

$$m_2 = \frac{T V_{r1} (V_{r1} + V_{r2})^2}{2\pi G \sin^3 i}$$

Из условия задачи нам неизвестен наклон плоскости орбиты системы к картинной плоскости **i**. Поэтому нижний предел массы звезд можно определить из предположения, что угол **i** равен 90°, т.е. плоскость орбиты двойной звезды совпадает с лучом зрения, а измеренные лучевые скорости компонентов равны их пространственным скоростям.

$$m_{1\ (min)} = \frac{T V_{r2} (V_{r1} + V_{r2})^2}{2\pi G}$$

$$m_{2\ (min)} = \frac{T V_{r1} (V_{r1} + V_{r2})^2}{2\pi G}$$

Откуда минимальные массы компонентов двойной системы будут равны 3 и 1,5 массам Солнца.

6. Движение частиц

С какой скоростью движутся частицы, входящие в наиболее плотное кольцо Сатурна, если известно, что период их обращения примерно совпадает с периодом вращения Сатурна вокруг своей оси и составляет 10 ч 40 мин? Масса Сатурна равна $5{,}7 \cdot 10^{26}$ кг.

Решение:

Дано:	*СИ:*	*Решение:*
$M = 5.7 \cdot 10^{26}$ кг $T = 10$ ч 40 мин	$T = 38\ 400$ с	

Найти:

$v_1 - ?$

Решение:

Первая космическая скорость:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} \Rightarrow R = G\frac{M}{v_1^2}$$

Линейная скорость:

$$v_1 = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R = \frac{v_1 T}{2\pi}$$

$$R = \frac{v_1 T}{2\pi} = G\frac{M}{v_1^2} \Rightarrow v_1^3 = G\frac{2\pi M}{T}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{G\frac{2\pi M}{T}} = \sqrt[3]{G\frac{2\pi M}{T}} =$$

$$= \sqrt[3]{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2\pi \cdot 5.7 \cdot 10^{26}}{38\ 400}} \approx$$

$$\approx 18\ 400\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 18.4\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Ответ:

$$v_1 \approx 18.4\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$