Муниципальный этап по астрономии

Условия и решения

11 класс *29 ноября 2022*

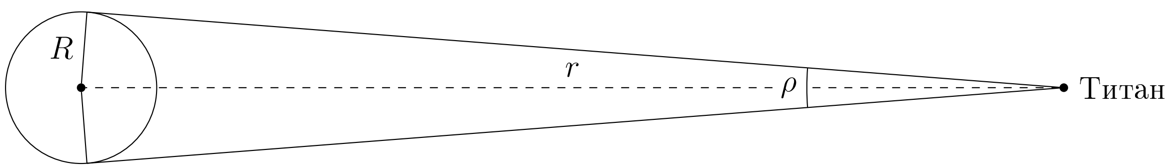
1. Солнце на Титане

8 баллов

Определите угловой размер Солнца при наблюдении со спутника Сатурна Титана. Орбиту Титана и Сатурна считать круговыми.

Решение.

Нарисуем рисунок



Запишем формулу углового размера:

$$\rho'' = \frac{206265 D}{r}$$

Диаметр Солнца возьмем из справочных данных $D_{\odot} = 2R_{\odot} = 2{\cdot}700\,000$ км $= 1\,400\,000$ км

Расстояние от Солнца до Сатурна равно 9.6 а.е. что много больше размеров орбиты Титана, поэтому можно считать расстояние до Солнца равным расстоянию до Сатурна.

Подставим значения в формулу углового размера:

$$\rho'' = \frac{206265 \cdot 1\ 400\ 000 \text{ км}}{9.6 \cdot 150\ 000\ 000 \text{ км}} = 201'' \approx 3.3'$$

Альтернативное решение. Известно, что угловой размер Солнца на Земле составляет $32'$. Угловые размеры обратно пропорциональны растоянию - в n раз дальше, соответсвенно угловой размер в n раз меньше. $\rho = 3.3'$

Ответ. $\rho = 3.3'$

Критерии оценивания **8**

Запись формулы для углового расстояния 2
Определение диаметра Солнца 2
Получение значения углового размера 4

2. Противостояние астероида

8 баллов

Противостояния некоторого астероида случаются только в двух диаметрально противоположных точках неба, каково взаимное расстояние от астероида до Земли в этот момент? Известно, что астероид находится между орбитами Марса и Юпитера. Орбиты Земли и астероида считать круговыми.

Решение. Противостояния находятся всего в двух диаметрально противоположных точках. Отсюда следует

1. Объект является внешним по отношению к Земле
2. Синодический период является полуцелым. То есть между ними проходит сколько-то полных периодов Земли и еще полгода

$$S = nT_{\oplus} + 0.5 \cdot T_{\oplus}, \ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

У астероида может быть как прямое вращение, так и обратное.

Рассмотрим **первый случай**, когда астероид имеет прямое вращение. Выразим период астероида через синодический период и период Земли:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T}, \quad T = \frac{ST_{\oplus}}{S - T_{\oplus}}$$

Поскольку планета внешняя, то период удобно считать в годах. Подставим период Земли, равный 1 году:

$$T = \frac{S}{S-1}$$

По условию период астероида не больше периода Юпитера и не меньше периода Марса, то есть:

$$T_{♂} < T < T_{♃}$$
$$1.89 \text{ года} < \frac{S}{S-1} < 11.86 \text{ лет}$$

Тогда диапазон возможных значений синодического периода:

$$2.12 \text{ года} > S > 1.09 \text{ лет}$$

Получается, что под формулу 1 подходит только $S = 1.5$ года. Тогда найдем период астероида:

$$T = \frac{S}{S-1} = \frac{1.5}{1.5-1} = 3 \text{ года}$$

Теперь найдем большую полуось орбиты астероида:

$$a = T^{2/3} = 3^{2/3} = 2.08 \text{ ае}$$

Посчитаем минимальное расстояние между астероидом и Землей:

$$r = a - a_{\oplus} = 2.08 - 1 = 1.08 \text{ а.е.}$$

Теперь рассмотрим другой случай, когда астероид имеет **обратное движение**. Выразим период астероида:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_{\oplus}}, \quad T = \frac{ST_{\oplus}}{T_{\oplus} - S}$$

Подставим $T_{\oplus} = 1$ году:

$$T = \frac{S}{1-S}$$

Чтобы период астероида был положительным и синодический период подходил под формулу 1, то синодический период может быть равен только 0.5 года. Тогда найдем период астероида:

$$T = \frac{S}{1-S} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1 \text{ год}$$

Получается, что период астероида меньше периода Марса, а значит, он находиться ближе к Солнцу, чем Марс, то есть случай с ретроградным движением астероида нам не подходит.

Ответ. $r = 1.08$ ае.

Критерии оценивания **8**

Синодический период являтся полуцелым 1
Объект внешний 1
Выражение для периода 2
Выбор периода для объекта между Марсом и Юпитером 1
Выражение для полуоси 1
Определение минимального расстояния 2

3. Минтака 16 баллов

Звезда Минтака ($\delta = -00°18'$) проходит диаметр поля зрения неподвижного телескопа за 1 минуту. Определите увеличение телескопа и диаметр поля зрения при этом увеличении. Поле зрение окуляра считать равным 45°.

Решение.

Диаметр поля зрения телескопа можно вычислить по формуле

$$\alpha_{\text{т}} = \tau \cos\delta,$$

где τ – время, за которое светило проходит диаметр поля зрения неподвижного телескопа. Звезда Минтака расположена неподалёку от небесного экватора, поэтому $\alpha_{\text{т}} \approx \tau$. В результате $\boxed{\alpha_{\text{т}} = 0.25°.}$

Увеличение телескопа Γ связано с величиной поля зрения окуляра следующим образом

$$\Gamma = \frac{\alpha_{\text{ок}}}{\alpha_{\text{т}}}.$$

Тогда получим значение $\boxed{\Gamma = 180.}$

Критерии оценивания **16**

Выражение размера поля зрения от времени 5
Нахождение поля зрения 3
Выражение для увеличения окуляр-телескоп 5
Нахождение увеличения 3

4. Кульминация Сатурна 16 баллов

Определите высоту верхней кульминации Сатурна 21 декабря, если он находится в противостоянии с Солнцем. Широта места наблюдения $\varphi = 56^\circ$ северной широты. Где на Земля высота верхней кульминации Сатурна в этот день будет максимальной? Орбиту Сатурна считать круговой и лежащей в плоскости эклиптики.

Решение.

Дата 21.12 — это зимнее солнцестояние. Склонение Солнца в этот день $\delta_\odot = -\varepsilon = -23.5^\circ$.

Задача про кульминацию Сатурна. Для дальнейшего решения задачи нужна определить склонение Сатурна. Сатурн, согласно условиям задачи, находится в противостоянии. Следовательно, Сатурн диаметрально противоположен Солнцу на земном небе.

Тогда склонение Сатурна равно:

$$\delta = -\delta_\odot = \varepsilon = 23.5^\circ$$

Зная склонение Сатурна, можно определить высоту верхней кульминации Сатурна в месте наблюдения с широтой $\varphi = 56^\circ$

$$h_\uparrow = 90^\circ - |56^\circ - 23.5^\circ| = 57.5^\circ$$

Теперь ответим на второй вопрос задачи, где на Земле высота верхней кульминации Сатурна в этот день будет максимальной?

Максимально возможная высота верхней кульминации — 90°, когда светило оказывается в зените.

$$h_\uparrow = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ$$

Отсюда следует

$$|\varphi - \delta| = 0^\circ$$

$$\varphi = \delta = \varepsilon = 23.5^\circ$$

Ответ. $h_\uparrow = 57.5^\circ$, $\varphi_{\max} = 23.5^\circ$.

Автор задачи - Игнатьев В.Б.

Критерии оценивания	**16**
Утверждение, что Сатурн противоположен Солнцу	2
Утверждение, что $\delta = -\delta_\odot$	2
ответ для $h_\uparrow$	6
Утверждение, что макс. кульминация в зените	2
ответ для $\varphi_{\max}$	4

5. Звездная рана 16 баллов

На границе Красноярской области и Якутии в Попигайской астроблеме обнаружено гигантское месторождение технических алмазов, появившееся 35.7 миллионов лет назад в результате удара хондритового астероида диаметром 8 км в углесодержащие породы. При ударе выделилась энергия, эквивалентная взрыву 70 тэратонн тротила (тэратонна – это триллион тонн). В результате удара давление достигло полутора миллионов атмосфер, а температура около $20\,000°C$, что привело к образованию импактных алмазов из углеродосодержащих пород. Этот удар стал началом геологической эпохи Олигоцена. Используя данную информацию и известные Вам законы, ответьте на следующие вопросы:

1. Какова была скорость астероида при ударе о Землю?
2. Какова была скорость астероида до вхождения в поле тяготения Земли?
3. Сколько времени длился удар?

Астероид считать сферическим. Плотность хондрита (оливин) считать равной 3200 кг/м^3. Энергия, выделяющаяся при взрыве 1 кг тротила, равна $E_0 = 4.18 \cdot 10^6$ Дж

Решение.

Энергия, выделяющаяся при взрыве 1 кг тротила, равна $E_0 = 4.18 \cdot 10^6$ Дж. Следовательно, при ударе астероида выделилась энергия

$$E = 2.93 \cdot 10^{23} \text{ Дж}$$

Из закона сохранения энергии следует, что энергия удара равна кинетической энергии астероида

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2$$

При этом масса астероида

$$m = \frac{1}{6} \pi D^3 \rho$$

Отсюда скорость астероида при ударе о Землю

$$v_1 = \sqrt{\frac{12E}{\pi D^3 \rho}} \approx 26.1 \text{ км/с}$$

Скорость астероида до вхождения в поле тяготения так же определим из закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{G M_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2 g R_\oplus} \approx 23.6 \text{ км/с}$$

Оценим время удара. Будем считать, что сила удара пропорциональна произведению давления на площадь сечения астероида $\frac{\pi}{4} D^2$

$$F \cdot t = \Delta(mV_1)$$

$$t = \frac{\Delta(mV_1)}{F} = \frac{mV_1}{pS} = \frac{4\pi\rho R^3 V_1}{3p\pi R^2} = \frac{2\rho D V_1}{3p} \approx 3 \text{ с}$$

Ответ. $v_1 = 26.1$ км/с, $v_2 = 23.6$ км/с, $t = 3$ с.

Критерии оценивания	**16**
Полная энергия удара	3
Определение скорости при ударе	3
Нахождение скорости вне поля тяготения Земли	5
Оценка времени удара через закон изменения импульса	5

6. Затменная звезда 16 баллов

Затменно-переменная звезда имеет отношение температур фотосфер звезд 2 раза, а радиусов - 3 раза. Горячая звезда меньшая по размеру. При изменении яркости будут два разных минимума блеска. Первый - главный минимум, когда слабая звезда закрывает яркую. Второй минимум - вторичный, когда яркая звезда закрывает часть слабой, находясь перед ней. Определите, чему равны падения яркости в звездных величинах во время главного и вторичного минимумов, для данной пары звезд. Потемнением звезд к краю пренебречь. Затмения считать центральными. Орбиты звезд круговыми.

Решение.

Из условия задачи следует:

$$\frac{T_1}{T_2} = 2, \ \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}$$

Для определения падений яркости воспользуемся моделью, в которой звезды это круглые диски радиусов R_1 и R_2.

Главный минимум, когда видна только слабая звезда, мы сравним с яркостью в момент вне минимумов, когда видны обе звезды. Так же воспользуемся законом Стефана-Больцмана о том, что ислучательная способность единицы поверхности - σT^4:

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4, L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4$$

$$\Delta m_I = m_{\text{гл. мин.}} - m_{\sum}$$

$$\frac{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4}{\pi R_2^2 \sigma T_2^4} = 10^{0.4(\Delta m_I)}$$

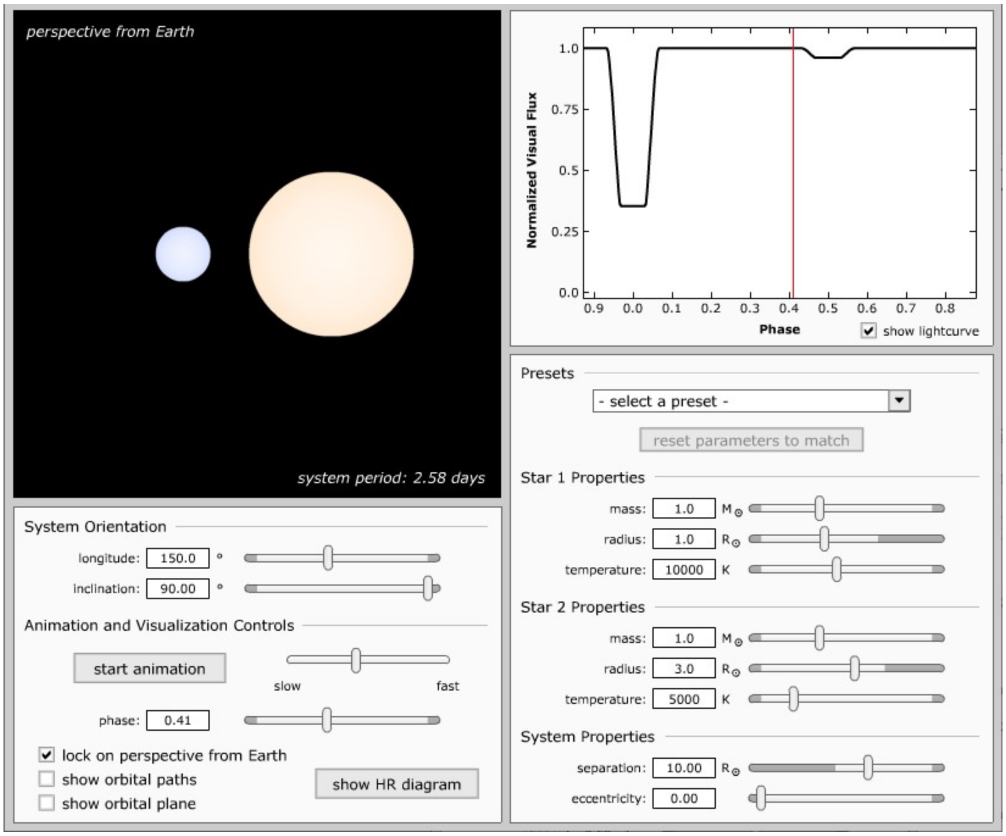


Рис. 1 Схема расположения звезд вне минимума

$$\frac{\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{\pi R_2^2 \sigma T_2^4} + 1 = 10^{0.4(\Delta m_I)}$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2}\frac{T_1^4}{T_2^4} + 1 = 10^{0.4\Delta m_I}$$

$$\Delta m_I = 2.5\lg\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\frac{T_1^4}{T_2^4}\right) = 2.5\lg\left(1 + \frac{16}{9}\right) = 1.11^m$$

Теперь рассмотрим случай вторичного минимума, когда яркая звезда проходит по диску слабой. Сравним с помощью формулы Погсона с ситуацией вне затмений, когда мы видим обе звезды. Необходимо учесть что слабую звезду мы видим не целиком, ее часть закрыта яркой звездой.

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4, L_2 = 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4$$

$$\Delta m_{II} = m_{\text{вт. мин.}} - m_{\sum}$$

$$\frac{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)\sigma T_2^4}{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4} = 10^{-0.4\Delta m_{II}}$$

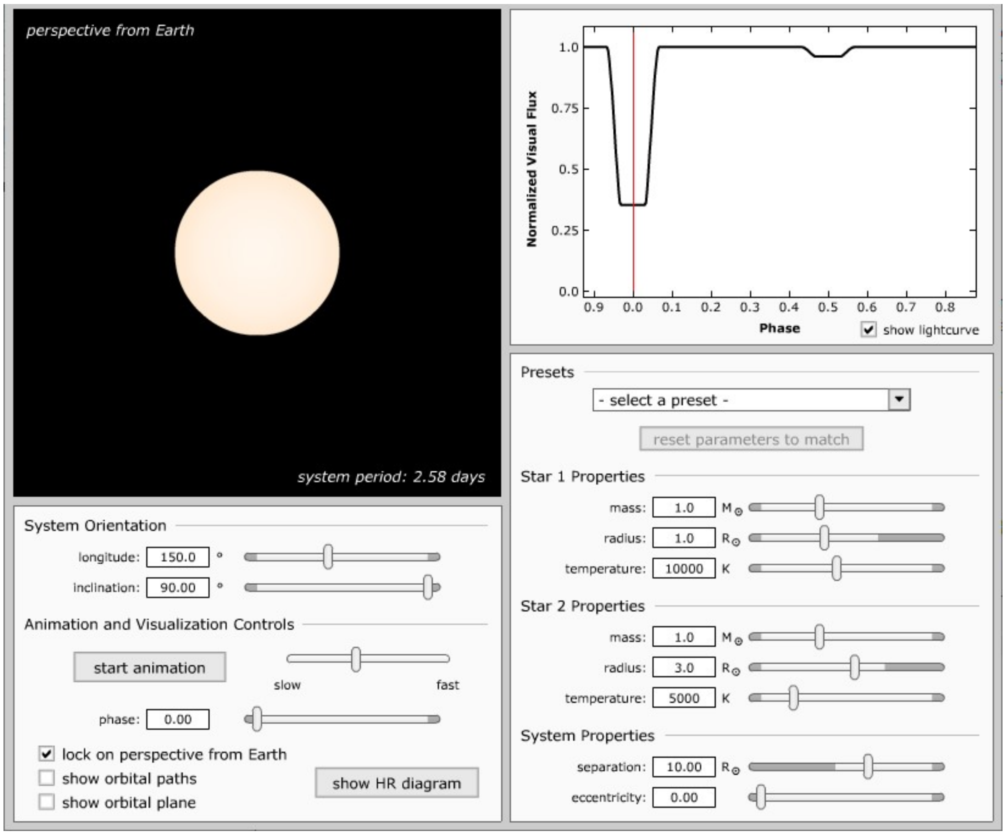


Рис. 2 Схема расположения звезд в момент главного минимума

$$\frac{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4 - \pi R_1^2 \sigma T_2^4}{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4} = 10^{-0.4 \Delta m_{II}}$$

$$1 - \frac{\pi R_1^2 \sigma T_2^4}{\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + \pi R_2^2 \sigma T_2^4} = 10^{-0.4 \Delta m_{II}}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{T_1^4}{T_2^4} + \frac{R_2^2}{R_1^2}} = 10^{-0.4 \Delta m_{II}}$$

$$\Delta m_{II} = -2.5 \lg \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{16} + 9} \right) = 0.13^m$$

Ответ. Главный минимум $\Delta m_I = 1.11^m$. Вторичный минимум $\Delta m_{II} = 0.13^m$

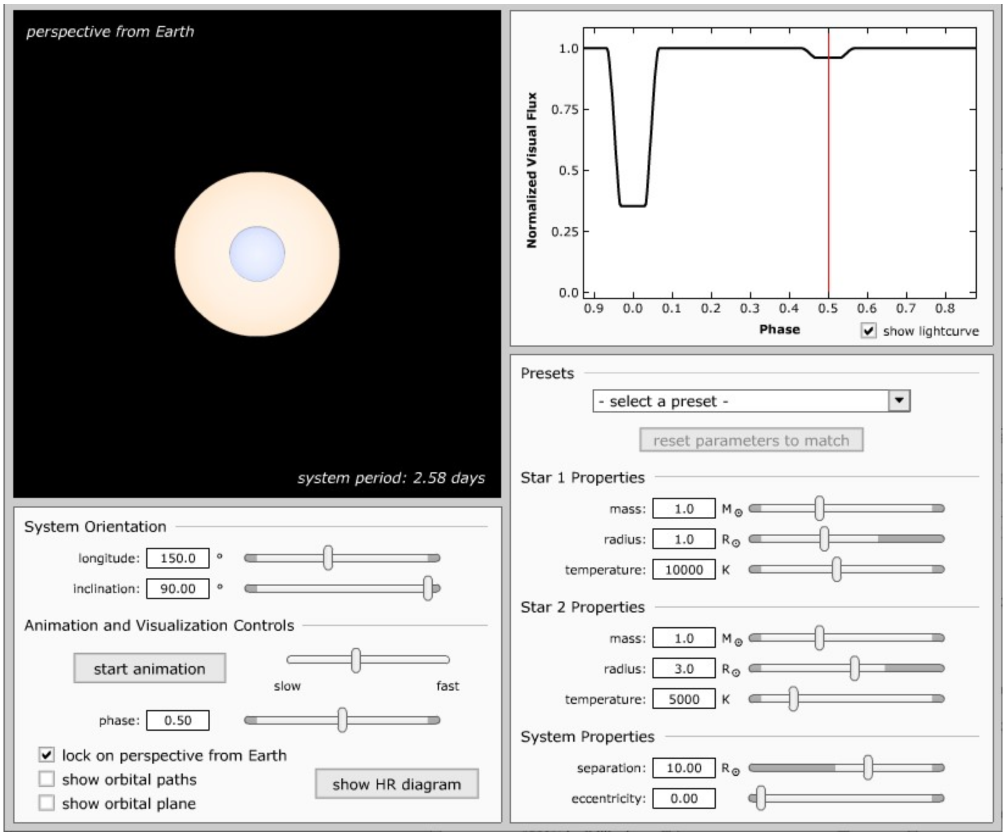


Рис. 3 Схема расположения звезд в момент вторичного минимума

Критерии оценивания	**16**
Использование модели главного минимума	2
Выражение отношения яркостей в момент главного минимума	2
Нахождение через формулу Погсона $\Delta m_I = 1.11^m$	3
Использование модели вторичного минимума	3
Выражение отношения яркостей в момент вторичного минимума	3
Нахождение через формулу Погсона $\Delta m_{II} = 0.13^m$	3

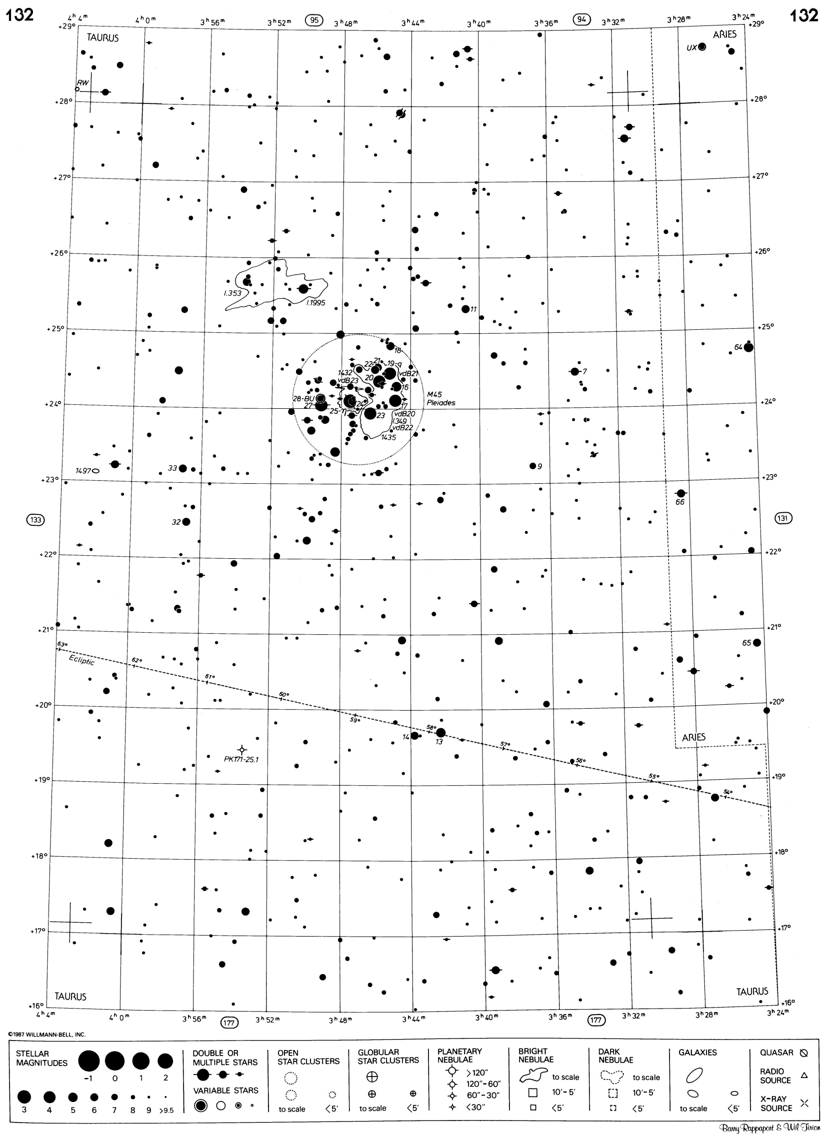
7. Венера в Плеядах — 20 баллов

Венера в максимальной восточной элонгации проходит через звездное скопление Плеяды. При помощи карты звездного неба определите максимальное время прохождения Венеры через Плеяды. Орбиты планет считать круговыми.

Решение. Используя представленную карту звездного неба, можно определить угловой размер звездного скопления Плеяды. Оно выделено на звездной карте кругом.

Сначала определим центр скопления.

Нам нужно провести два-три непараллельных хорды и построить к ним серединные перпендикуляры. Пересечение перпендикуляров даст центр окружности. Радиус окружности можно измерить с помощью линейки. Тогда измерим размер скопления. Диаметр

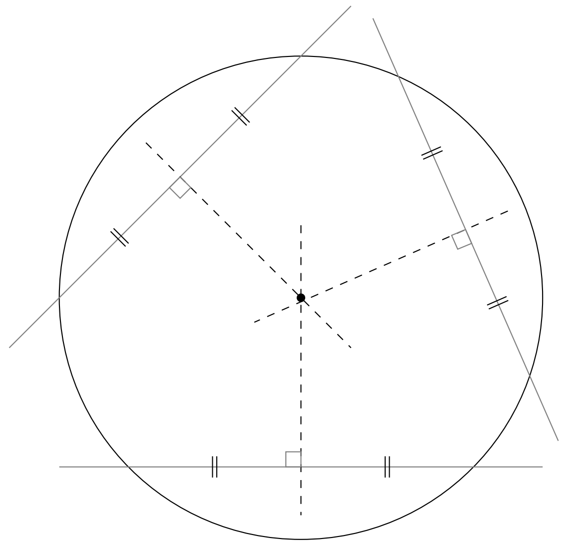


лучше измерять несколько раз: по склонению (это значение берем в исходном виде) и по прямому восхождению. Второе значение нужно исправить за склонение: так как $\delta \neq 0$, диаметр, измеренный по α, равен $d \cdot \cos \delta$. После этого найдем среднюю величину размера скопления. У автора он оказался равен 3.2 см.

Чтобы перейти к угловому размеру скопления, найдем масштаб карты: у автора 1° склонения соответствует 1.7 см. Тогда угловой размер Плеяд:

$$d = \frac{3.2 \text{ см}}{1.7 \text{ см}} \cdot 1^\circ = 1.9^\circ$$

Вторым этапом необходимо найти угловую скорость, с которой двигается Венера относительно далеких звезд. Эту величину можно найти несколькими способами. Опишем пару из них:



- **Геометрический**

  Венера находится в максимальной элонгации. Вектор ее скорости направлен на наблюдателя на Земле. Может показаться, что угловая скорость Венеры в этот момент равна нулю. В этом случае Венера находилась бы в точке стояния. Но наблюдатель (то есть Земля) также движется, и проекция вектора скорости Земли на ось, перпендикулярную лучу зрения, не нулевая: ее проекция будет равна

  $$v_\tau = v_\oplus \sin\gamma$$

  Угловая скорость находится по формуле

  $$\omega = \frac{v_\tau}{r},$$

  где r – расстояние до объекта. В нашем случае оно равно

  $$r = a_\oplus \sin\gamma$$

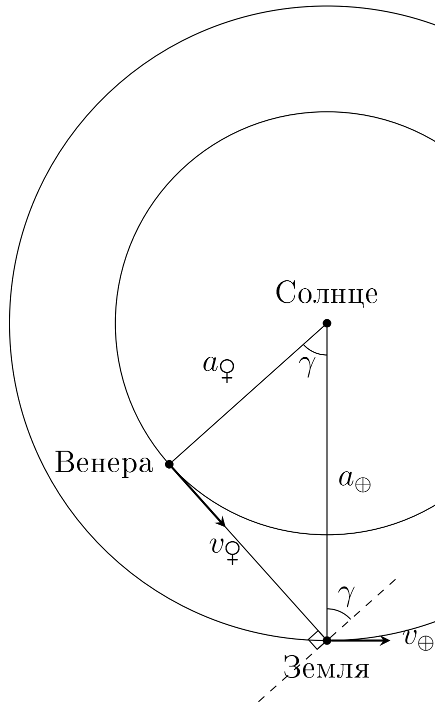
  Тогда угловая скорость:

  $$\omega = \frac{v_\oplus \sin\gamma}{a_\oplus \sin\gamma} = \frac{v_\oplus}{a_\oplus} \approx 2\cdot 10^{-7}\ \text{рад/с} = 1^\circ/\text{день}$$

- **Эвристический**

  В момент элонгации Венера не приближается, и не удаляется от Солнца на земном небе. Следовательно, их угловые скорости равны. Значит, угловая скорость Венеры:

  $$\omega_♀ = \frac{360}{365.25} \approx 1^\circ/\text{день}$$



Теперь, когда нам известны угловая скорость Венеры и угловое расстояние, которое планете надо пройти, определим искомое время.

$$t = \frac{d}{\omega_♀} = 1.9 \text{ дня}$$

Ответ. 1.9 дня.

Критерии оценивания	**20**
Определение размера Плеяд	8
Определение центра скопления *2*	
Определение размера по разным координатам *4*	
Вывод о размере *2*	
Определение угловой скорости Венеры	8
Получение итогового ответа с точностью до 5%	4