## 11 класс

**Предлагается 6 заданий.**

**Рекомендуемое в приказе время проведения олимпиады 120 минут.**

**Максимальное количество баллов за олимпиаду в 11 классе 64.**

**1. Условие.**

Земля, освещаемая и обогреваемая Солнцем, находится в «поясе жизни» на расстоянии, равном 1 а.е., где тепловой поток энергии достаточен для возникновения и существования органической жизни.

Какого размера выглядит звезда Бетельгейзе для возможных жителей экзопланеты, находящейся в «поясе жизни» этой звезды?

Температура звезды Бетельгейзе 3500 К, радиус равен 800 радиусов Солнца.

Температура Солнца = 5800 К.

**1. Решение.**

Светимость звезды определяется формулой $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$.

Найдем, во сколько раз светимость звезды Бетельгейзе $L_{Бет}$ превосходит солнечную светимость $L_{Сол}$.

$$\frac{L_{Бет}}{L_{Сол}} = \frac{R_{Бет}^2 T_{Бет}^4}{R_{Сол}^2 T_{Сол}^4} = 84867\ (раз)$$

Следовательно, на расстоянии 1 а.е. экзопланета получает поток энергии почти в 80 тысяч раз превосходящий земной в «поясе жизни». Чтобы его ослабить, следует удалиться на соответствующее расстояние. Так как интенсивность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, то найдем необходимое расстояние D как

$$D = \sqrt{84867} \approx 291\, а.е.$$

Таким образом, температурные условия жизни на экзопланете будут близки к земным примерно на расстоянии в 290 раз большем, чем расстояние от Земли до Солнца.

Угловой радиус Солнца на небе $r = 0.5^0$.

Угловой радиус Бетельгейзе для ее планетян $r_{Бет} = \frac{800 R_{Сол}}{D} = 1.4^0$

Ответ: Для жителей экзопланеты у звезды Бетельгейзе на небе будет виден оранжевый шар почти в три раз превосходящий по размеру наше Солнце.

4. **Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **9**.

Формула светимости звезды – 1 балл.

Оценка во сколько раз светимость звезды Бетельгейзе превосходит солнечную светимость – 3 балла.

Нахождение необходимого расстояния, на котором планета окажется в зоне жизни – 3 балла.

Вычисление углового радиуса Бетельгейзе – 2 балла.

**2. Условие.**

Наблюдения установили, что яркость цефеиды меняется от 3.6 зв. величин в максимуме блеска до 4.2 зв. величины в минимуме. При этом изменяется температура: от 5400К в максимуме до 4800К в минимуме. Определить, во сколько изменился радиус цефеиды.

**2. Решение.**

$$\lg\frac{E_1}{E_2} = 0.4(m_2 - m_1)$$

Освещённость численно равна световому потоку, падающему на участок поверхности единичной площади:

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

Световой поток от звезды пропорционален ее общей светимости

$$\frac{\Phi_{макс}}{\Phi_{мин}} = \frac{L_{макс}}{L_{мин}}$$

Найдем изменения светового потока в относительных единицах.

$$\frac{L_{макс}}{L_{мин}} = 2.5^{(4.2-3.6)} = 1.73$$

Светимость звезды определяется формулой

$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$, откуда радиус звезды $R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}}$

Следовательно,

$\frac{R_{макс}}{R_{мин}} = \sqrt{\frac{L_{макс} T_{мин}^4}{L_{мин} T_{макс}^4}} = \left(\frac{4800}{5400}\right)^2 \cdot 1.73^{0.5} = 1.04$ - незначительное изменение радиуса влияет на яркость звезды!!!

**2. Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **9**.

Формула освещённости - 2 балла.

Указание связи освещенности и светового потока – 1 балл.

Вывод о пропорциональности светового потока от звезды ее общей светимости– 1 балл.

Нахождение изменения светового потока – 2 балла.

Выражение для радиуса звезды – 2 балла.

Нахождение изменения радиуса – 1 балл.

**3. Условие.**

В созвездии Орион на расстоянии 400 св. лет от Земли находится гигантская звезда Бетельгейзе (альфа Ориона), имеющая яркость 0.4 зв. вел, приближающаяся к нам с радиальной скоростью 29.1 км/сек, причем смещение в картинной плоскости в направлении часовых углов составляет $\mu_\alpha = 0.0275'' / год$, а по оси склонения $\mu_\delta = 0.0113'' / год$. На каком кратчайшем расстоянии от Земли и через сколько лет пролетит Бетельгейзе? Как будет выглядеть звезда (яркость в звездных величинах)?

**3. Решение.**

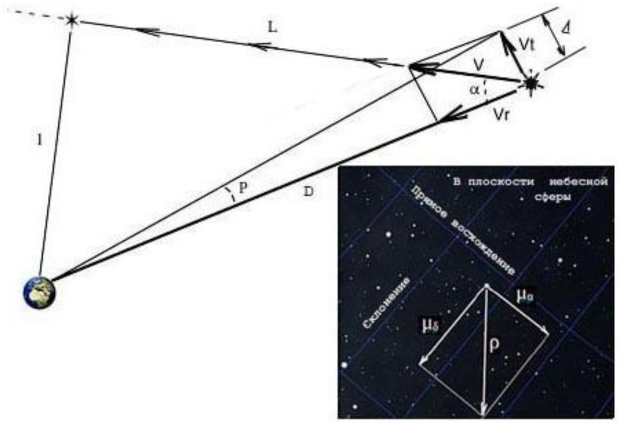


*Рис. Картинная плоскость процесса*

Найдем полную (в картинной плоскости) величину собственного движения звезды в угловых секундах $\rho$

$$\rho = \sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2} = \sqrt{0.0275^2 + 0.0113^2} = 0.0297''/ год$$

Известное расстояние до звезды в километрах $D$ и угловое смещение $\rho$ позволяют вычислить величину перемещения звезды в пространстве $\Delta$ в километрах за год, а затем найти тангенциальную $V_t$ скорость движения звезды в км/сек

$$V_t = \frac{\Delta}{1 год}$$

$$V_t = \frac{D \cdot \sin\rho}{1} = \frac{D\rho}{206265} = \frac{400 \cdot 63241 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 0.0297}{206265 \cdot 31536000} = 17.33 (км/с)$$

Здесь учтено, что

*1 св.год = 63 241 а.е.*

*1 год =31536000 сек*

и тогда полная пространственная скорость $V$ в километрах

$$V = \sqrt{\left(V_t^2 + V_r^2\right)} = \sqrt{\left(17.33^2 + 29.1^2\right)} \approx 34\, км/сек$$

Из подобия треугольников (один угол общий, другой - прямой)

следует соотношение $\frac{L}{V} = \frac{D}{Vr}$, отсюда $L = \frac{DV_r}{V} = \frac{400 \cdot 29.1}{33.2} = 350\, св\ лет$.

При скорости $V$, равной 33.2 км/сек, на это потребуется время $T = \frac{L}{V}$.

$$T = \frac{350 \cdot 63241 \cdot 150 \cdot 10^6}{34} = 97651544 \cdot 10^6 (сек) = 3.1 \cdot 10^6 (лет)$$

За это время Бетельгейзе пролетит из нынешнего положения в точку сближения с Землей.

Расстояние в момент сближения $l$ найдем из соотношения

$\frac{l}{V_t} = \frac{D}{V}$, отсюда $l = \frac{D \cdot V_t}{V} = \frac{400 \cdot 17.33}{33.2} \approx 209 (св\ лет)$

Найдем изменение яркости, обратно пропорциональное квадратам расстояний

$\frac{I}{I_0} = \frac{D^2}{l^2} = 2.512^{(m-m_0)}$, отсюда $\Delta m = m_0 - m = 2.5 \lg\frac{D^2}{l^2} = 2.5 \lg\frac{400^2}{209^2} = 1.41\ (зв\ вел)$

Отсюда $m = m_0 - 1.41 = 0.4 - 1.41 = -1.01$

Ответ: звезда Бетельгейзе пройдет примерно в 2 раза ближе к Земле на расстоянии 209 световых лет и будет ярче на 1 звездную величину, т.е. $m = -1.01$.

**3. Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **14**.
Построение чертежа процесса в картинной плоскости - 2 балла.
Нахождение полной (в картинной плоскости) величины собственного движения звезды - 2 балла.
Нахождение тангенциальной скорости движения - 2 балла.
Нахождение полной пространственной скорости - 2 балла.
Нахождение кратчайшего расстояния прохождения Бетельгейзе от Земли - 2 балла.
Нахождение через сколько лет пролетит Бетельгейзе - 2 балла.
Нахождение яркости Бетельгейзе- 2 балла.

**4. Условие.**

Вокруг звезды вращается экзопланета с периодом $T_0 = 1.2\ года$. Но звезда вспыхнула, сбросила оболочку и из красного сверхгиганта превратилась в белого карлика. Наблюдения позволяют предположить, что экзопланета не пострадала, ее орбита не претерпела изменений размеров, но период обращения вокруг звезды увеличился и стал равным $T_1 = 1.3\ года$.

Определить, какая масса звезды была сброшена оболочкой.

**4. Решение.**

Воспользуемся третьим законом Кеплера.

$$\frac{T_0^2(M_0 + m)}{T_1^2(M_1 + m)} = \frac{a_0^3}{a_1^3} = 1$$, так как $a_0 = a_1$,

пренебрегаем массой экзопланеты, имеем

$$T_0^2 M_0 = T_1^2 M_1,\ M_1 = \frac{M_0 T_0^2}{T_1^2} = 0.85 M_0$$

Итак, оболочкой сброшено 0.15 массы первоначальной звезды.

Ответ: оболочкой сброшено 0.15 массы первоначальной звезды.

**4. Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **6**.

Запись третьего закона Кеплера - 2 балла.

Нахождение массы, сброшенной звездой - 4 балла.

**5. Условие.**

В двойной системе звезд **γ** (гамма) Андромеды, находящейся от нас на расстоянии *D=355 св. лет*, один из компонентов, $\gamma_2$, в свою очередь, является двойной звездой. Эта пара состоит из двух звезд спектрального класса К3 (температура 4500К) с блеском $+5.1^m$ и $+6.3^m$. Удалось также определить период их орбитального движения *T= 61 год* и угловое расстояние $\rho = 0.8''$ друг от друга. Найдите массы и размеры этих звезд.

*Рис. Гамма Андромеды. В телескоп отчётливо видны два компонента звёздной системы - более яркий, оранжевого цвета, и отстоящий от него на 10 угловых секунд голубой, менее яркий компонент.*

5. Решение.

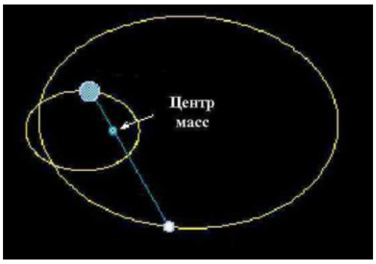


*Рис. Движение компонентов двойной звезды*

Найдем расстояние между компонентами $a$ при известном расстоянии $D$ и угловом размере $\rho$.

$1\text{св. год} = 63\,241\text{а.е.}$, отсюда $a = D \cdot \rho$, $\rho$ в радианах. $\rho(рад) = \dfrac{\rho''}{206265}$

$$a = \frac{365 \cdot 63241 \cdot 0.8}{206265} = 89.53(а.е.)$$

Найдем суммарную массу звезд $m_{12} = m_1 + m_2$, используя третий закон Кеплера. $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G}{4\pi^2}\left(m_1 + m_2\right)$. Возьмем, для сравнения, систему Солнце-Земля, обозначим $m_{сз} = M_{Sun} + m_{зем}$, затем пренебрежем массой Земли по сравнению с массой Солнца.

$$\frac{m_{12}}{M_{Sun}} = \frac{a^3}{a_{сз}^3}\frac{T_{сз}^2}{T^2} = \frac{89.53^3}{1^3}\frac{1^2}{61^2} \approx 193(раз)$$

Вычислим соотношение светимостей звезд по величине видимого блеска звезд

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_1}{I_2} = 2.512^{(6.3-5.1)} = 3(раз)$$

По отношению светимостей найдем отношение радиусов

$\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{L_1 \cdot T_2^4}{L_2 \cdot T_1^4}}$, так как температуры звезд одинаковы, имеем $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{3} = 1.7\,(раз)$

В предположении одинаковости строения звезд разделим пропорционально объему каждой звезды суммарную массу $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3 = 1.7^3 = 4.9$

$$m_1 = 4.9m_2$$

$$m_1 + m_2 = 5.9\,m_2 = 193M_{sun}$$

$m_2 = 32.7\,M_{sun}$, $m_1 = 4.9m_2 = 160.3M_{sun}$.

Найдем абсолютные величины звезд

*1св.год =0.3 пк.   355св лет =106.5 пк*

$$M = m + 5 - 5\lg D$$

$$M_1 = 5.1 + 5 - 5\lg(106.5) = -0.04$$

$$M_2 = 6.3 + 5 - 5\lg(106.5) = 1.16$$

Сравнивая абсолютные значения звезд и Солнца ($M_{Sun} = 4.7$ *зв величин*), получим отношения световых потоков и, следовательно, светимостей звезд.

$$\frac{L_1}{L_{Sun}} = \frac{I_1}{I_{Sun}} = 2.512^{(4.7+0.04)} = 78.7$$

$$\frac{L_2}{L_{Sun}} = \frac{I_2}{I_{Sun}} = 2.512^{(4.7-1.16)} = 26.1$$

Найдем радиусы звезд.

$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$, отсюда $R = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi\sigma T^4}}$

$$\frac{R_1}{R_{Sun}} = \sqrt{\frac{L_1 \cdot T_{Sun}^4}{L_{Sun} \cdot T_1^4}} = \sqrt{78.7\frac{5800^4}{4500^4}} = 14.73$$

$$\frac{R_2}{R_{Sun}} = \sqrt{\frac{L_2 \cdot T_{Sun}^4}{L_{Sun} \cdot T_2^4}} = \sqrt{26.1\frac{5800^4}{4500^4}} = 8.5$$

Ответ:

первая звезда: $m_1 = 193\,M_{Sun}$, $R_1 = 14.73 R_{Sun}$;

вторая звезда: $m_2 = 160.3\,M_{Sun}$, $R_1 = 8.5 R_{Sun}$.

**5**. **Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **18**.

Чертеж движения компонентов звезды вокруг центра масс – 2 балла.

Нахождение расстояния между компонентами двойной звездной системы – 2 балла.

Нахождение суммарной массы звезд – 4 балла.

Вычисление соотношения светимостей звезд по величине видимого блеска звезд – 2 балла.

Вывод формулы отношения радиусов звезд двойной системы – 2 балла.

Нахождение массы каждой звезды – 2 балла.

Оценка светимостей звезд – 2 балла.

Оценка радиусов звезд – 2 балла.

**6. Условие.**

На темном летне-осеннем небе в созвездии Геркулес можно разглядеть невооруженным глазом туманное пятнышко 5.8 зв. величины — шаровое скопление звезд M13. В телескоп по краям можно разглядеть отдельные звезды 9.5 зв. величины. Определить, сколько звезд содержится в шаровом скоплении. Считать, что все звезды скопления солнечного типа. (Учесть, что не существует звезд ярче по абсолютной величине, чем $M = -5$).

**6. Решение.**

Определим расстояние до скопления $D$ (в парсеках). Предположим, что звезды с $M = -5$ мы наблюдаем как звезды с $m = 9.5$. Воспользуемся формулой $M = m + 5 - 5\lg D$.

$\lg D = \dfrac{m + 5 - M}{5} = \dfrac{19.5}{5} = 3.9$, отсюда $D \approx 8000 = 8$ *кпк* (хотя $D$ можно не вычислять, в дальнейшем нам понадобится $\lg D$).

Найдем абсолютную звездную величину шарового скопления

$$M_{скопл} = m + 5 - 5\lg D = 5.8 + 5 - 5 \cdot 3.9 = -8.7$$

Перейдем от разницы в звездных величинах шарового скопления и Солнца к отношению светимостей и узнаем, какое количество Солнц может заменить шаровое скопление.

$$\frac{L_{скопл}}{L_{Солн}} = 2.512^{(M_{Солн} - M_{Скопл})} = 2.512^{(4.7+8.7)} = 229225$$

Скопление состоит почти из четверти миллиона Солнц.

Ответ: шаровое скопление состоит из примерно 250000 звезд типа Солнца.

**6. Система оценивания**. Максимальное количество баллов за решение данной задачи – **8**.

Запись формулы Погсона - 2 балла.

Вычисление расстояния до скопления - 2 балла.

Найдем абсолютную звездную величину шарового скопления - 2 балла.

Оценка светимости шарового скопления - 2 балла.