10 класс

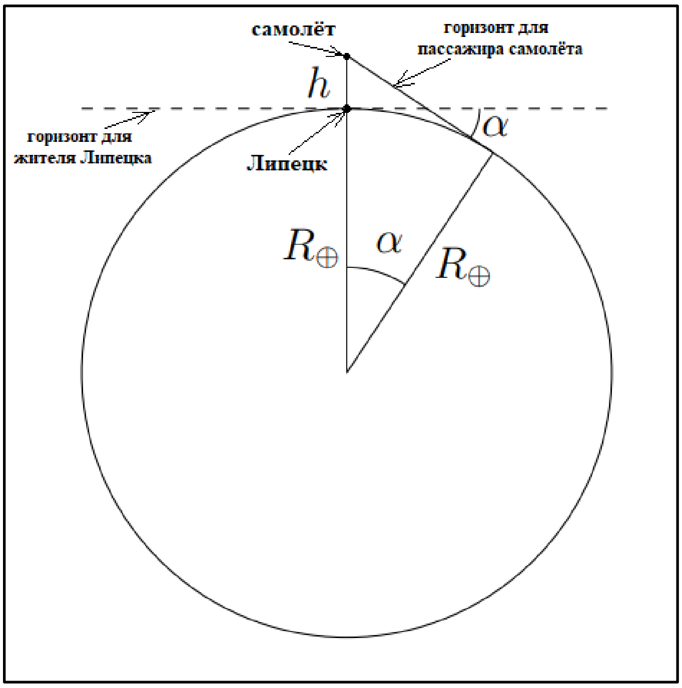
Задача № 1.

В день весеннего равноденствия самолёт на высоте $\mathbf{10}$ км пролетает над Липецком ($\boldsymbol{\varphi}_{\text{Лип}} = \mathbf{52,5°}$) и его пассажиры наблюдают восход Солнца. Через какое время после этого восход Солнца увидят жители Липецка? Рефракцией пренебречь.

Решение.

В день весеннего равноденствия суточный путь Солнца совпадает с небесным экватором. Будем считать, что Солнце движется по нему равномерно. В день весеннего равноденствия на одном и том же меридиане восход Солнца будет происходить в одно и то же время.

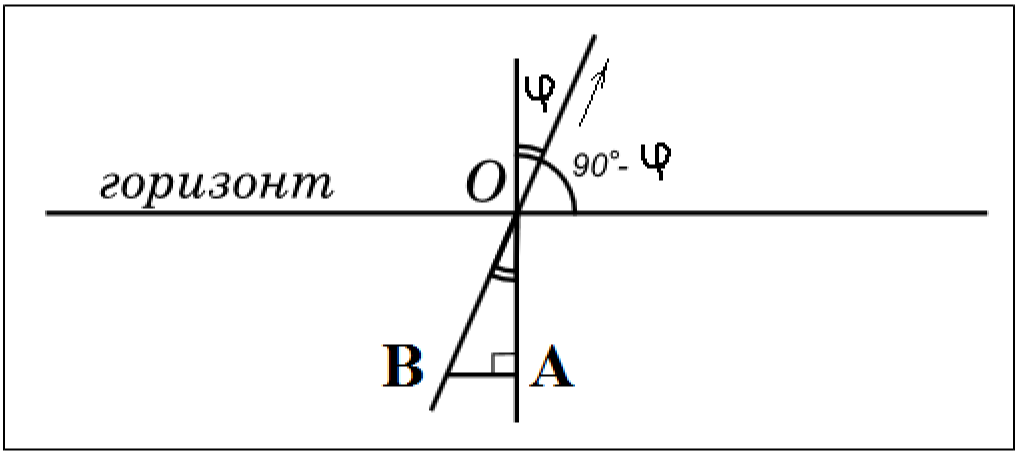
Пассажир самолёта расположен выше, чем житель Липецка, поэтому для него восход Солнца наступит раньше (смотри рисунок ниже).



Пассажир самолёта может заглянуть под горизонт жителя Липецка, находящегося на поверхности Земли, на угол $\boldsymbol{\alpha}$. Вычислим этот угол

$$\boldsymbol{\alpha = arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right) = arccos\left(\frac{6400\ \text{км}}{6410\ \text{км}}\right) \approx 3,2°}$$

В точке на широте $\boldsymbol{\varphi}$ экватор наклонен к горизонту под углом $\mathbf{90° - \boldsymbol{\varphi}}$ (смотри рисунок ниже).



Тогда для того, чтобы подняться до горизонта жителя Липецка на $\boldsymbol{3,2°}$ (отрезок $\boldsymbol{OA}$) Солнце должно пройти отрезок $\boldsymbol{OB}$. И тот и другой отрезок выражены в угловой мере.

Угловая скорость движения Солнца $\boldsymbol{\omega_{\odot} = 15°}$/час, она равна угловой скорости вращения Земли $\left(\frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{24}\text{ часа}} = \mathbf{15°}/\text{час}\right)$.

Житель Липецка увидит восход Солнца позже на время

$$\boldsymbol{t = \frac{OB}{\omega_{\odot}}}$$

учитывая, что из прямоугольного треугольника $\boldsymbol{OAB}$

$$\boldsymbol{OB = \frac{OA}{\cos\varphi}}$$

получим

$$\boldsymbol{t = \frac{OA}{\cos\varphi \cdot \omega_{\odot}}}$$

Тогда

$$\boldsymbol{t = \frac{3,2°}{\cos 52,5° \cdot 15°/\text{час}} \approx 0,35}\text{ часа} \approx \mathbf{21}\text{ минута}$$

Ответ: примерно через **21** минуту.

Задача № 2.

Исаак Ньютон родился **4** января **1643** года по григорианскому календарю. В какой день недели это произошло?

Решение.

Ньютон родился $\boldsymbol{2023 - 1643 = 380}$ лет назад.

Предполагается, что все участники олимпиады знают дату и день недели в который они пишут этап. Обладая этими сведениями можно определить день недели соответствующий **4** января **2023** года – это среда.

Также мы знаем, что в обычном году **365** суток, а в високосном — **366** суток. Среди **28** последовательных лет будет **21** обычный год и **7** високосных, поэтому спустя **28** лет распределение дней недели по датам месяца повторится.

Не будем пока учитывать то, что **1700**, **1800** и **1900** годы не были високосными, и поделим **380** лет на **28** с остатком. В остатке получится **16** лет, а это означает, что со дня рождения Ньютона, кроме целого числа -летних циклов, прошло еще **16** лет. Нужно узнать какой день недели приходился на **4** января **16** лет назад, то есть в **2007** году. Составим таблицу, учитывая при этом високосные годы (день недели сдвигается на двое суток).

2022	2021	2020	2019	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007
вт	пн	сб	пт	чт	ср	пн	вс	сб	пт	ср	вт	пн	вс	пт	чт

Вместо таблицы можно использовать другие подходы.

Таким образом, если бы не три дополнительных невисокосных года, то ответом был бы четверг. Но на самом деле со дня рождения Ньютона прошло на три дня меньше, поэтому ответ сдвигается на три дня вперед — получается воскресенье.

Ответ: воскресенье.

Задача № 3.

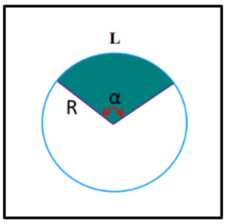
Вы оказались ясной ночью на дне цилиндрического колодца глубиной **40** м и диаметром **2** м. Оцените, сколько звезд вы можете увидеть на небе в данный момент, если посмотрите вверх.

Решение.

Вычислим сначала угловой размер того участка небесной сферы, которая видна со дна колодца.

Связь между длиной дуги, радиусом окружности и соответствующим центральным углом (в радианах) определяется формулой

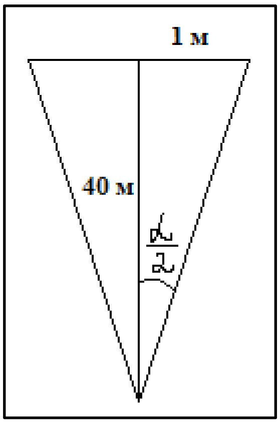
$$\boldsymbol{\alpha}[\text{рад}] = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}}$$



Тогда, угловой размер видимого со дна колодца участка неба

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{со дна}} = \frac{\mathbf{2}\ \text{м}}{\mathbf{40}\ \text{м}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}}\ \text{рад} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}} \cdot \frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}{}^{\circ} \approx \mathbf{2{,}86^{\circ}}$$

Можно считать иначе.



$$\boldsymbol{tg}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\text{со дна}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha}_{\text{со дна}} = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{arctg}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}} \approx \mathbf{2{,}86^{\circ}}$$

Тогда площадь участка неба, видимого со дна колодца в угловых единицах

$$\boldsymbol{S}_{\text{со дна}} = {\boldsymbol{\alpha}_{\text{со дна}}}^{\mathbf{2}} \approx \mathbf{8{,}2}\ \text{кв. градуса}$$

Теперь оценим, сколько звёзд приходится на такой участок. То есть вычислим среднюю площадь небесной сферы, приходящуюся на одну звезду, и сравним с нашим результатом.

Площадь всей небесной сферы в угловых единицах равна $\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}$ стерадиан, или около $\mathbf{41\,000}$ квадратных градусов. Это можно знать или вычислить, зная определение стерадиана. Например, так.

Телесный угол в $\mathbf{1}$ стерадиан с вершиной в центре сферы радиусом $\boldsymbol{R}$ вырезает из этой сферы поверхность площадью $\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$.

То есть если площадь поверхности сферы $\boldsymbol{S} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$, то эта же площадь в стерадианах $\boldsymbol{S} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi}$ стерадиан. Соотношение между стерадианами и квадратными градусами можно получить из следующих соображений

$$\mathbf{1}\ \text{рад} = \frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}{}^{\circ} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{1}\ \text{стерадиан} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\right)^{\mathbf{2}} \approx \mathbf{3\,283}\ \text{кв. градусов}$$

Тогда

$$\mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi}\ \text{стерадиан} = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{3\,283}\ \text{кв. градусов} \approx \mathbf{41\,255}\ \text{кв. градусов}$$

Человек с нормальным зрением тёмной безлунной ночью на всём небе видит около $\mathbf{6\,000}$ звёзд. Значит, на одну звезду приходится

$$\boldsymbol{S}_{\text{ср.на одну звезду}} = \frac{\mathbf{41\,000}}{\mathbf{6\,000}} \approx \mathbf{6{,}83}\ \text{кв. градуса}$$

Сравнивая этот результат с предыдущим

$$\boldsymbol{S}_{\text{со дна}} = \mathbf{8{,}2}\ \text{кв. градуса} \gtrsim \boldsymbol{S}_{\text{ср.на одну звезду}} = \mathbf{6{,}83}\ \text{кв. градуса}$$

замечаем, что вычисленные площади примерно равны, значит, в среднем со дна колодца можно будет увидеть одну или в редких случаях две звезды.

Можно заметить, что среди видимых невооруженным глазом звезд основное количество достаточно слабые – пятая, шестая звёздные величины. Тогда при присутствующих в реальности помехах (неидеальное зрение, засветка и т.д.) с большой вероятностью наша оценка будет завышенной. Скорее всего, не удастся увидеть ни одной звезды.

Ответ: одну или две звезды.

<u>Задача № 4.</u>

Первая открытая межзвёздная комета **2I/Борисова** приближалась к Солнцу на минимальное расстояние $\mathbf{2}$ а. е. Оцените её гелиоцентрическую скорость в этом положении.

<u>Решение.</u>

Так как объект межзвёздный, то он не входит в солнечную систему, а, значит, его скорость в указанной точке должна быть больше второй космической для этого расстояния.

$$\boldsymbol{v}_{\text{кометы}} > \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{II}} = \sqrt{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}}$$

где $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}}$ – первая космическая скорость для указанного расстояния.

Учитывая, что первая космическая скорость – это просто круговая скорость для указанного расстояния

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_{\odot}}{\boldsymbol{R}}}$$

где $\boldsymbol{M}_{\odot}$ – масса Солнца, а $\boldsymbol{R}$ – указанное расстояние. Тогда

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{II}} = \sqrt{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_{\odot}}{\boldsymbol{R}}}$$

Подставляем численные данные

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}\ \text{м}}} \approx 29,8\ \text{км/с}$$

Значит

$$v_{\text{кометы}} > 29,8\ \text{км/с}$$

Забавное совпадение, но случайно вторая космическая скорость для кометы оказалась равна орбитальной скорости Земли.

Ответ: больше $29,8$ км/с.

Задача № 5.

Два школьника наблюдают звездное небо каждый в свой телескоп. Предел проницающей способности телескопа первого школьника равен 12^m. Диаметр объектива телескопа второго школьника меньше, чем у первого в $2,5$ раза. Определите абсолютную звездную величину самых слабых звезд, которые сможет наблюдать через свой телескоп второй школьник с расстояния 1 кпк. Межзвёздным поглощением света пренебречь.

Решение.

Количество собираемого телескопом света пропорционально площади его объектива, то есть квадрату диаметра этого объектива.

Так как диаметр объектива телескопа второго школьника меньше, чем у первого в $2,5$ раза, то света за одинаковый промежуток времени он собирает в $2,5^2$ раза меньше.

Если количество собираемой энергии уменьшается в $2,5$ раза, то звездная величина наблюдаемых объектов уменьшается на 1^m. Так как энергия уменьшится в $2,5^2$ раза, то звездная величина наблюдаемых объектов уменьшится на 2^m.

Самые слабые объекты, наблюдаемые через телескоп первым школьником, имеют звездную величину 12^{m} (это и есть предельная проницающая способность телескопа), следовательно, второй школьник сможет наблюдать объекты 10^{m}.

Так как поглощением света можно пренебречь, то связь между расстоянием, видимой и абсолютной звёздными величинами, задаётся формулой

$$M = m + 5 - 5 \cdot \lg r\ [\text{пк}]$$

где M - абсолютная звездная величина объекта, m – его видимая звёздная величин, а r – расстояние до объекта в парсеках. В нашем случае

$$M = 10^m + 5 - 5 \cdot lg\, 10^3 = 0^m$$

Ответ: 0^m.

Задача № 6.

Оцените массу вещества солнечного ветра, находящегося внутри земной орбиты, если рядом с Землёй средняя концентрация его частиц равна $\mathbf{10}$ см$^{-3}$. Считайте, что солнечный ветер - плазма из протонов и электронов в равных долях. Также считайте, что ветер распространяется от Солнца сферически симметрично и его скорость постоянна.

Решение.

Так как скорость ветра постоянна и одинакова по всем направлениям, то его слои, сброшенные Солнцем в разные моменты времени, не перемешиваются. Это значит, что массы сферических слоёв с одинаковой толщиной равны. Тогда общая масса вещества солнечного ветра, находящегося внутри какой-либо орбиты, равна произведению массы слоя на количество таких слоёв внутри этой орбиты.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_{\text{слоя}} \cdot \boldsymbol{N}_{\text{слоёв}}$$

Количество слоёв зависит от того, слой какой толщины мы выберем. Так как размерность известной концентрации - см$^{-3}$, то логично взять толщину слоя равной $\mathbf{1}$ см. Тогда количество слоёв – это просто расстояние от выбранной орбиты до Солнца в сантиметрах.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_{\text{слоя}} \cdot \boldsymbol{R}_{\text{орб}}[\text{см}]$$

При таком подходе мы пренебрегаем размерами Солнца, но это вполне оправдано, так как размеры Солнца много меньше радиуса орбиты Земли.

Вычислим массу сферического слоя толщины $\mathbf{1}$ см, находящегося вблизи орбиты Земли, так как именно в этом месте мы знаем концентрацию частиц.

$$\boldsymbol{m}_{\text{слоя}} = \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{V}_{\text{слоя}}$$

Сначала разберёмся с плотностью.

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}_{\mathbf{0}}$$

где $\boldsymbol{n}$ – концентрация частиц ветра, а $\boldsymbol{m}_{\mathbf{0}}$ – масса частиц, из которых состоит ветер.

Так как в условии задачи сказано, что солнечный ветер - плазма из протонов и электронов в равных долях, то плотность ветра вблизи Земли

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{m}_{p} + \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{m}_{e}$$

Но, учитывая, что масса электрона примерно в $\mathbf{1\,836}$ раз меньше, чем масса протона, можно вкладом электронов в массу вообще пренебречь. Так и поступим, тогда

$$\rho = \frac{n}{2} \cdot m_p$$

Теперь нужно вычислить объём слоя. Пусть l – толщина слоя, тогда, учитывая формулу объёма шара, получаем

$$V_{\text{слоя}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_{\text{орб}\,\oplus} + l\right)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^3$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left({R_{\text{орб}\,\oplus}}^3 + 3 \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2 \cdot l + 3 \cdot R_{\text{орб}\,\oplus} \cdot l^2 + l^3 - {R_{\text{орб}\,\oplus}}^3\right)$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(3 \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2 \cdot l + 3 \cdot R_{\text{орб}\,\oplus} \cdot l^2 + l^3\right)$$

Учитывая, что $l \ll R_{\text{орб}\,\oplus}$ можно пренебречь членами с l^2 и l^3, тогда

$$V_{\text{слоя}} \approx 4 \cdot \pi \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2 \cdot l$$

Для массы сферического слоя вблизи Земли имеем

$$m_{\text{слоя}} = \rho \cdot V_{\text{слоя}} = \frac{n}{2} \cdot m_p \cdot 4 \cdot \pi \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2 \cdot l = 2 \cdot \pi \cdot m_p \cdot n \cdot l \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2$$

Окончательно, получаем массу вещества солнечного ветра внутри орбиты Земли

$$M = m_{\text{слоя}} \cdot R_{\text{орб}}[\text{см}] = 2 \cdot \pi \cdot m_p \cdot n \cdot l \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^3$$

Подставим численные данные

$$m_{\text{слоя}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \cdot 10\ \cdot 1\ \cdot (1{,}5 \cdot 10^{13}\ )^3 \approx 35{,}4\ \cdot 10^{13}\ \text{кг}$$

Можно решать чуть иначе. Пусть Φ – поток протонов солнечного ветра через сферу радиусом $R_{\text{орб}\,\oplus}$ (поток – это количество протонов через поверхность указанной сферы в единицу времени), тогда

$$\Phi = \frac{n}{2} \cdot v \cdot S_{\text{сферы}} = \frac{n}{2} \cdot v \cdot 4 \cdot \pi \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2 = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot v \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^2$$

где v – скорость частиц ветра.

Масса вещества ветра

$$M = \Phi \cdot m_p \cdot t$$

где t – время полёта частиц ветра от Солнца до поверхности сферы. Причём $t = \frac{R_{\text{орб}\,\oplus}}{v}$, тогда

$$M = 2 \cdot \pi \cdot m_p \cdot n \cdot {R_{\text{орб}\,\oplus}}^3$$

что даёт такой же численный ответ.

Ответ: примерно $35{,}4\ \cdot 10^{13}$ кг.