10 класс

10.1. На какую высоту необходимо вывести космический аппарат, чтобы его параболическая скорость стала в два раза меньше второй космической скорости?

Решение.

Возьмем отношение второй космической скорости $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ и параболической скорости га высоте h: $v_p = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$ **(3 б)**. Получим: $2 = \sqrt{\frac{R}{R+h}}$ **(3 б)**, откуда: $h = 3R$ **(2 б)**.

10.2. Аккреционная светимость.

Аккрецией называется падение вещества на звезду под действием её притяжения. Если падающее вещество при столкновении с поверхностью звезды высвечивает всю энергию, приобретённую под действием сил гравитации, то светимость аккрецирующей звезды равна $L = \dot{M} \cdot \frac{GM}{R}$, где $\dot{M}$ - темп аккреции (масса вещества, падающего за 1 с на поверхность звезды), M и R – масса и радиус звезды, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Определите темп аккреции (в кг/с и в массах Солнца в год), который мог бы обеспечить наблюдаемую светимость Солнца.

1 год = $3 \cdot 10^7$ с. Данные о Солнце: $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ м.

Решение.

Темп аккреции вещества на Солнце: $\dot{M} = \frac{L_\odot R_\odot}{GM_\odot}$. **(1б).**

Из этой формулы: $\dot{M} \approx 2 \cdot 10^{15}\ кг/с$ **(3б)**; $\dot{M} \approx 3 \cdot 10^{-8} M_\odot/год$ **(4б).**

10.3. Разрушение планетной системы.

Планета движется вокруг своей звезды по круговой орбите. На каком-то этапе своей эволюции звезда мгновенно теряет часть своей массы. В результате планета безвозвратно уходит от своей звезды. Какую часть своей массы потеряла звезда?

Решение.

Скорость планеты на круговой орбите радиуса r: $v_{кр} = \sqrt{\dfrac{GM_0}{r}}$. **(1б)**

Для убегания от своей звезды планета должна иметь скорость как минимум равной параболической скорости $v_{пар} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$, **(1б)**

что возможно при новой массе М звезды. Из равенства $v_{кр} = v_{пар}$ **(3б)**
следует, что $M = 0{,}5M_0$, т.е. звезда должна потерять как минимум 50% своей массы. **(3б).**

10.4. Вращение Земли.

Длительность суток на Земле в современную эпоху T_0 = 24 часа. Однако из-за приливного трения продолжительность суток на Земле увеличивается на $\Delta T = 10^{-3}$ с за Δt = 100 лет. 1). Считая вращение Земли равнозамедленным, найдите угловое ускорение ε Земли. 1 год = $3{,}2\cdot 10^7$ с.

Указание: *примените формулу «приближённого вычисления»* $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$ *при* $x \ll 1$.

2). Предположим, что когда-нибудь Земля перестанет вращаться вокруг своей оси. Через сколько лет (τ) это произойдёт?

Решение.

1). Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси: $\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot \Delta t$. **(1б)**

Т.к. $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$, $T = T_0 + \Delta T = T_0\left(1 + \dfrac{\Delta T}{T_0}\right)$, **(1б)**

то угловое ускорение Земли $\varepsilon = \dfrac{2\pi \cdot \Delta T}{T_0^2 \Delta t}$. **(3б)**

Из этой формулы получаем: $\varepsilon = 2{,}6\cdot 10^{-22}$ рад/с^2. **(1б)**

2). Если Земля перестанет вращаться, то её угловая скорость $\omega = 0$ через $\tau = \dfrac{\omega_0}{\varepsilon} = \dfrac{2\pi}{\varepsilon T_0}$;**(1б)**

$\tau \approx 9\cdot 10^9$ лет. **(1б)**

10.5. Нейтронная звезда.

Рассмотрим нейтронную звезду со средней плотностью $\rho = 10^{18}$ кг/м^3. Предположим, что радиус этой звезды равен предельному радиусу $R = \alpha \cdot R_g$, где $\alpha = 4/3$; $R_g = 2GM/c^2$ - гравитационный радиус звезды; M - масса звезды; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная; $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Вычислить радиус R (в км) этой звезды и её массу М (в единицах солнечной массы $M_\odot$). Масса Солнца $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг.

Решение.

Т.к. $R = \alpha \cdot \dfrac{2GM}{c^2}$ и $M = \rho \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3}$, то $R = c \cdot \sqrt{\dfrac{3}{8\pi\alpha G\rho}}$ **(4б)**, и R = 11 км. **(2б)**

Масса звезды: M = $5{,}6\cdot10^{30}$ кг **(1б)** и M = 2,8 $M_\odot$ **(1б).**

10.6. Сферическая форма небесных тел.

Где проходит граница между малыми и большими небесными телами? Начиная с какой «критической» массы $M_{кр}$, с какого «критического» размера $R_{кр}$ небесное тело будет иметь сферическую форму? Численные оценки получите для тел из гранита. Плотность гранита ρ = 2700 кг/м^3. Предел прочности гранита $\sigma_m = 10^8$ Па. Для объема несферического тела принять оценочную формулу V ≈ R^3, где R – характерный размер тела.
G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Решение.

Бесформенное небесное тело может принять сферическую форму после его «разрушения» гравитационными силами давления (после этого сферическая форма принимается под действием самогравитации). Условие гравитационного разрушения: гравитационное (гидростатическое) давление в «центре» $P_{гр}$ должно удовлетворять условию $P_{гр} \geq \sigma_m$. **(1б)**

Гравитационное давление: $P_{гр} \approx \rho g R \approx \rho \dfrac{GM}{R^2} R = \dfrac{\rho GM}{R}$. **(1б)**

Из условия разрушения сразу следует

$$R \geq \frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_m}{G}} \quad \Rightarrow \quad R_{кр} \approx \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_m}{G}}$$ **(2б),** $R_{кр} \approx 450$ км. **(1б)**

и

$$M_{кр} \approx \rho R_{кр}^3 \approx \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\sigma_m}{G}\right)^{3/2}$$ **(2б),** $M_{кр} \approx 3\cdot10^{20}$ кг. **(1б)**