Задания и решения - 11 класс

1. *Бинокль (11 класс)*

Полевой бинокль является замечательным инструментом для проведения первых астрономических наблюдений начинающим любителем астрономии. Стандартный полевой бинокль имеет следующие параметры: 10×50. Это означает, что кратность такого бинокля равна десяти, а диаметр его объективов составляет 50мм. Диаметр зрачка глаза человека в условиях сумеречной адаптации равен примерно 6мм. Во сколько раз больше света собирает полевой бинокль по сравнению с невооруженным глазом? Светопотерями в оптике бинокля пренебречь.

Решение

Световой поток, собираемый тем или иным оптическим прибором (и глазом, в частности), прямо пропорционален площади входной апертуры (объектива, входного зрачка) этого прибора или же квадрату диаметра этой апертуры. Поэтому для нахождения интересующего нас соотношения достаточно сравнить квадраты диаметров объектива бинокля и зрачка глаза:

$$k = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{50}{6}\right)^2 \approx 70 \text{ раз}$$

2. *Зенитное расстояние Арктура (11 класс)*

Во сколько раз различаются между собой максимальное и минимальное зенитные расстояния Арктура в г. Кострома (φ=57°46' с.ш., λ=40°56' в.д.)? Экваториальные координаты Арктура равны $\alpha=14^h17^m$, δ=+19°04'. Атмосферную рефракцию во внимание не принимать.

Решение

Очевидно, что минимальное зенитное расстояние Арктура будет иметь место в момент его верхней кульминации, а максимальное – в момент нижней кульминации этой звезды. Т.к. склонение Арктура меньше по своей величине широты места наблюдения, то эта звезда будет кульминировать к югу от зенита на высоте:

$$h_{\text{â}} = 90° - \varphi + \delta = 90° - 57°46' + 19°04' = 51°18'$$

Зенитное расстояние Арктура в верхней кульминации составит:

$$z_{\text{â}} = 90° - h = 90° - 51°18' = 38°42'$$

Нижняя кульминация Арктура будет вычисляться по формуле:

$$h_{\text{í}} = -90° + \varphi + \delta = -90° + 57°46' + 19°04' = -13°10'$$

Знак «минус» означает, что нижняя кульминация Арктура происходит под горизонтом. Зенитное же расстояние звезды в момент нижней кульминации, очевидно, будет равно:

$$z_{\text{í}} = 90° + 13°10' = 103°10'$$

Сравниваем полученные значения:

$$\frac{z_н}{z_в} = \frac{103°10'}{38°42'} = \frac{103{,}17°}{38{,}07°} \approx 2{,}7 \text{ раза}$$

3. Годичное смещение Солнца (11 класс)

Эксцентриситет земной орбиты равен 0,0167. Оцените, на какое угловое расстояние смещается Солнце в результате своего видимого годичного смещения на небе («на фоне звезд») за месяц (за 30 дней) в периоды времени, когда Земля находится вблизи перигелия своей орбиты, и когда она находится вблизи афелия.

Решение

Орбитальная скорость движения Земли в перигелии равна:

$$V_q = V_{cp} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

где **e** – эксцентриситет орбиты; а $\mathbf{V_{cp}}$ – средняя орбитальная скорость движения планеты, равная по сути круговой (первой космической) скорости при движении по орбите, радиус которой был бы равен большой полуоси рассматриваемой эллиптической орбиты.

$$V_{cp} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

где **G** – гравитационная постоянная; **M** – масса Солнца; **a** – большая полуось орбиты планеты.

С учетом последнего равенства, первое выражение можно представить в виде:

$$V_q = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

За некоторый рассматриваемый промежуток времени $\Delta\mathbf{t}$ Земля вблизи перигелия проходит дугу эллипса, линейная протяженность которой примерно равна:

$$l_q = V_q \cdot \Delta t = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \Delta t$$

Т.к. рассматриваемый промежуток времени является относительно небольшим, а орбита Земли в целом мало отличается от окружности, то без значительной ошибки рассматриваемую дугу эллипса вблизи перигелия земной орбиты можно заменить (аппроксимировать) дугой окружности, с радиусом, равным перигелийному расстоянию Земли.

В таком случае угловая протяженность дуги эллипса, выраженная в радианах, примерно составит:

$$\alpha_q \approx \frac{l_q}{q} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\Delta t}{a(1-e)}$$

Именно на такую угловую величину примерно сместится Солнце за время $\Delta\mathbf{t}$, когда Земля будет двигаться вблизи перигелия своей орбиты.

В афелии, соответственно, скорость движения Земли по орбите составит:

$$V_Q = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

Угловое же смещение Солнца за время $\Delta\mathbf{t}$, когда наша планета будет двигаться вблизи афелия своей орбиты, по аналогии составит примерно:

$$\alpha_Q \approx \frac{l_Q}{Q} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \frac{\Delta t}{a(1+e)}$$

Подставляя в полученные формулы имеющиеся данные, получим:

$$\alpha_q \approx 30{,}6°$$

$$\alpha_Q \approx 28{,}6°$$

Таким образом, когда Земля будет находиться вблизи перигелия своей орбиты, за месяц Солнце опишет на небе (на «фоне звезд») дугу, примерно на 2° большую, чем за тот месяц, когда наша планета будет находиться вблизи афелия.

4. *«Новая» шкала звездных величин (11 класс)*

Как известно, блеск звезды первой звездной величины в сто раз больше блеска звезды шестой звездной величины. Если гипотетически предположить, что это отношение составляло бы не сто, а тысячу раз, то во сколько раз тогда различался бы блеск двух звезд, звездные величины которых отличаются на единицу?

Решение

Пусть **k** – искомое отношение блеска двух звезд со звездными величинами, отличающимися между собой на единицу, а **n** – отношение блеска звезд первой и шестой величин, которое по условию задачи равно тысяче.

Для блеска звезд первой и второй величины можно записать:

$$\frac{E_1}{E_2} = k$$

для звезд второй и третьей величины получится аналогичное выражение:

$$\frac{E_2}{E_3} = k$$

Если же теперь сравнить блеск звезд первой и третьей звездной величины, то получим:

$$\frac{E_1}{E_3} = k^2$$

Для звезд первой и четвертой величины, соответственно:

$$\frac{E_1}{E_4} = k^3$$

По аналогии общее выражение для отношения блеска звезд первой и **m**-ой величины будет иметь вид:

$$\frac{E_1}{E_m} = k^{(m-1)}$$

Тогда для звезд первой и шестой величины можно записать следующее отношение:

$$\frac{E_1}{E_6} = n = k^5$$

Откуда искомая величина составит:

$$k = n^{\frac{1}{5}} = 1\,000^{\frac{1}{5}} = 3{,}98 \approx 4 \text{ раза}$$

5. *Расход солнечного водорода (11 класс)*

Масса ядра водорода (протона) равна $1{,}67262177774 \times 10^{-27}$ кг, а масса ядра гелия (альфа частицы) $6{,}644656 \times 10^{-27}$ кг. Оцените, сколько в секунду на Солнце «сгорает» водорода, сколько при этом образуется гелия и насколько Солнце теряет в своей массе. Светимость Солнца равна $3{,}828 \times 10^{26}$ Вт.

Решение

В ходе происходящих в ядре Солнца термоядерных реакций синтеза, четыре ядра водорода (четыре протона) в результате определенной цепочки последовательных преобразований превращаются в одно ядро гелия (альфа частицу). Разница между массой входящих в реакцию компонентов (четырех ядер водорода) и массой конечного продукта реакции (ядром гелия) преобразуется в энергию в соответствии с формулой Эйнштейна:

$$E = mc^2$$

В соответствии с этим, энергия, которая выделится при превращении четырех ядер водорода в ядро гелия, будет равна:

$$\Delta E = (4m_H - m_{He})c^2$$

где m_H – масса ядра водорода, m_{He} – масса ядра гелия, c – скорость света.
Масса водорода, ежесекундно «сгораемая» в термоядерных реакциях в недрах Солнца, соответственно, будет равна:

$$M_H = \frac{L}{\Delta E} \cdot 4m_H = \frac{4L \cdot m_H}{(4m_H - m_{He})c^2} \approx 622 \text{ млн. тонн}$$

где L – светимость Солнца.
Потеря массы Солнца на излучение в секунду составит:

$$\Delta M = \frac{L}{c^2} \approx 4 \text{ млн. тонн}$$

Исходя из закона сохранения массы/энергии, можно записать:

$$M_H = \Delta M + M_{He}$$

Откуда масса ежесекундно синтезируемого на Солнце гелия составит:

$$M_{He} = M_H - \Delta M \approx 618 \text{ млн. тонн}$$

Таким образом, в недрах Солнца каждую секунду примерно 622 млн. тонн водорода превращается в 618 млн. тонн гелия, а около 4 млн. тонн массы Солнца уносится энергией его электромагнитного излучения.

6. *Размеры Сириуса (11 класс)*

Сириус имеет абсолютную болометрическую звездную величину $1{,}3^m$ и температуру поверхности 9 900 K. Оцените радиус этой звезды в сравнении с радиусом Солнца, абсолютная болометрическая звездная величина которого равна $4{,}7^m$, а температура поверхности 5 900 K.

Решение

Пусть $\mathbf{M_o}$ и $\mathbf{M}$ – абсолютные болометрические звездные величины, соответственно, Солнца и Сириуса, а $\mathbf{T_o}$ и $\mathbf{T}$ – температуры поверхности Солнца и Сириуса.

Светимости $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ двух звезд и их абсолютные болометрические звездные величины $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ связаны между собой выражением, представляющим собой разновидность формулы Погсона, в которой вместо блеска этих звезд фигурируют их светимости, а видимые звездные величины заменены абсолютными:

$$\frac{L_1}{L_2} = 2,512^{(M_2 - M_1)}$$

С другой стороны, светимость звезды пропорциональна квадрату ее радиуса и четвертой степени температуры ее поверхности:

$$L \sim R^2 T^4$$

С учетом этих двух выражений, для Солнца и Сириуса можно записать следующее равенство:

$$\frac{R^2 T^4}{R_o{}^2 T_o{}^4} = 2,512^{(M_o - M)}$$

Прологарифмируем данное выражение и сделаем некоторые дальнейшие преобразования:

$$2\lg\left(\frac{R}{R_o}\right) + 4\lg\left(\frac{T}{T_o}\right) = 0,4(M_o - M)$$

$$\lg\left(\frac{R}{R_o}\right) = 2\lg\left(\frac{T_o}{T}\right) + 0,2(M_o - M)$$

Если радиусы звезд выражать в радиусах Солнца, то $\mathbf{R_o}=1$, и тогда получим:

$$\lg R = 2\lg\left(\frac{T_o}{T}\right) + 0,2(M_o - M) = k$$

$$R = 10^k$$

Подставляя данные из условия задачи, окончательно получим:

$$R = 1,7R_o$$