

1. Астрономическая карусель

8 баллов

Игнатьев В.Б.

Вам предоставлены 4 астрономических утверждения. Укажите какие из них верные, а какие нет. Обязательно поясните для каждого случая, почему вы так думаете.

- A. Попытное движение наблюдается только у внешних планет.
- B. В спектрах звездах можно обнаружить не только линии водорода и гелия, но и линии металлов - железа, кальция и натрия.
- C. Солнце в конце своей эволюции станет черной дырой
- D. Во вселенной есть галактики у которых наблюдается синее смещение, но не наблюдается красного смещения.

Решение.

Рассмотрим подробно каждое из четырех утверждений.

- A. Попытное движение наблюдается только у внешних планет.
Попытное движение наблюдается у внешних планет около противостояния, у внутренних планет вблизи нижнего соединения. Следовательно данное утверждение - не верно.
- B. В спектрах звезд можно обнаружить не только линии водорода и гелия, но и линии металлов - железа, кальция и натрия.
Линии металлов видны только в спектрах не очень горячих звезд - поздних спектральных классов *F, G, K, M*. Следовательно данное утверждение - верно.
- C. Солнце в конце своей эволюции станет черной дырой.
Черные дыры- конечная стадия эволюции звезд с массой больше $20M_{\odot}$. Конечная стадия эволюции Солнца - белый карлик. Следовательно утверждение - не верно.

D. Во вселенной есть галактики у которых наблюдается синее смещение, но не наблюдается красного смещения.

Синее или фиолетовое смещение будут показывать галактики движущиеся к нам. Такие галактики наблюдаются в самых ближайших окрестностях Млечного Пути. Например, туманность Андромеды - *M31*, является такой галактикой. Следовательно данное утверждение - верно.

Ответ. А — Неверное, В — Верное, С — Неверное, D — Неверное

Критерии оценивания.

8

Правильное указание о верности или ложности утверждений А–D

8

за каждое с пояснением +2

за каждое без пояснений +1

2. Шаровое скопление

8 баллов

Игнатьев В.Б.

Шаровое звездное скопление имеет угловой размер $\theta = 6'40''$ и удалено от нас на расстояние $R = 10$ кпк. Определите диаметр шарового звездного скопления.

Решение.

Запишем формулу углового размера скопления на небе Земли:

$$\theta = 206265'' \frac{D}{R}$$

$$D = \frac{\theta R}{206265''} = \frac{(6 + \frac{40}{60}) \cdot 60'' \cdot 10^4}{206265''} \approx 19.4 \text{ пк}$$

Ответ. Диаметр шарового скопления $D = 19.4$ пк

Критерии оценивания.	8
Формула углового размера	2
Перевод единиц углового размера	2
Верное выражение для линейного размера	2
Правильный итоговый ответ	2

3. Координаты светил

16 баллов

Игнатьев В.Б.

Определите координаты звезд (прямое восхождение и склонение), которые кульминируют с зенитным расстоянием 30° в момент восхода точки осеннего равноденствия для наблюдателя в пункте с географической широтой $\varphi = 60^\circ 30'$ с.ш.

Решение.

Точка осеннего равноденствия имеет координаты $\alpha = 12^h, \delta = 0^\circ$. Следовательно на небесном меридиане в верхней кульминации звезды будут иметь прямое восхождение $\alpha = 12^h - 6^h = 6^h$. И в нижней кульминации прямое восхождение $\alpha = 12^h + 6^h = 18^h$.

Обратим внимание, что случай когда кульминация происходит к северу от зенита не реализуется, потому что точка полюса мира будет иметь такое же зенитное расстояние 30° .

$$h_{\uparrow} = 90^\circ - \varphi + \delta_1 = 90^\circ - z$$

$$\delta_1 = \varphi - z = 60^\circ 30' - 30^\circ = 30^\circ 30'$$

Получаем координаты первой звезды $\alpha_1 = 6^h, \delta_1 = 30^\circ 30'$

Определим координаты второго светила. Светило имеет зенитное расстояние 30° , что больше чем угол между зенитом и положением оси мира и отвесной линии.

$$h_{\downarrow} = -90^\circ + \varphi + \delta_2 = 90^\circ - z$$

$$\delta_2 = \varphi - z = 60^\circ 30' - 30^\circ = 30^\circ 30'$$

Тогда светило будет иметь координаты $\alpha_2 = 18^h, \delta_2 = 89^\circ 30'$.

Критерии оценивания.

16

Нахождение склонения первого светила	3
Нахождение прямого восхождения первого светила	5
Нахождение склонения второго светила	3
Нахождение прямого восхождения второго светила	5

4. Экзопланета

16 баллов

Кузнецов М.В.

Первая космическая скорость на некоторой экзопланете в два раза больше, чем на Земле, а плотность в 1.2 раза больше. Определите массу и радиус планеты.

Решение.

Запишем выражение для первой космической скорости

$$V = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R}} = \sqrt{G \frac{4}{3}\pi \rho R}$$

Следовательно отношение первых космических скоростей:

$$\frac{V}{V_{\oplus}} = \frac{\sqrt{G\frac{4}{3}\pi\rho R}}{\sqrt{G\frac{4}{3}\pi\rho_{\oplus}R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\oplus}} \frac{R}{R_{\oplus}}}$$

$$\frac{R}{R_{\oplus}} = \frac{V}{V_{\oplus}} \sqrt{\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}}$$

Следовательно радиус планеты составит:

$$R = R_{\oplus} \frac{V}{V_{\oplus}} \sqrt{\frac{\rho_{\oplus}}{\rho}} = 6378 \frac{2}{\sqrt{1.2}} = 1.83R_{\oplus} = 11645 \text{ км}$$

Масса планеты:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\frac{M}{M_{\oplus}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{\frac{4}{3}\pi\rho_{\oplus}R_{\oplus}^3} = \frac{\rho}{\rho_{\oplus}} \left(\frac{R}{R_{\oplus}}\right)^3$$

$$M = M_{\oplus} \frac{\rho}{\rho_{\oplus}} \left(\frac{R}{R_{\oplus}}\right)^3 = M_{\oplus} \cdot 1.2 \left(\frac{11645}{6378}\right)^3 = 7.3M_{\oplus} = 4.363 \cdot 10^{25} \text{ кг}$$

Ответ. А. Массу планеты $M = 7.3M_{\oplus} = 4.363 \cdot 10^{25}$ кг В. Радиус планеты $R = 1.83R_{\oplus} = 11645$ км

Критерии оценивания.

16

Выражение для первой космической скорости	2
Верное нахождение радиуса	6
Связь объема и плотности	2
Верное нахождение массы	6

5. Масса и излучение

16 баллов

Игнатьев В.Б.

Оцените с какой скоростью уменьшается масса Солнца за счет излучения в настоящее время. Выразите эту величину в массах Солнца в год. Определите какое количество термоядерных реакций происходит на Солнце каждую секунду, если в ходе одной такой реакции выделяется 26 МэВ, которые уносятся через излучение. $1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Решение.

Из справочных данных нам потребуется масса Солнца - $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ и светимость Солнца - $L_{\odot} = 3.88 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$

Определим потерю Солнцем массы в секунду в массах Солнца за $t = 1 \text{ год}$:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

$$\Delta m = \frac{L_{\odot} \cdot t}{c^2 M_{\odot}} = \frac{3.88 \cdot 10^{26} \cdot 365.26 \cdot 86400}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}} = 6.84 \cdot 10^{-14} M_{\odot}$$

Вычислим сколько энергии выделяется в одной реакции:

$$E_0 = 26 \text{ МэВ} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ} = 26 \cdot 10^6 \text{ эВ} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ} = 4.16 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

Найдем количество реакций N за $\tau = 1 \text{ с}$:

$$N = \frac{L_{\odot} \cdot \tau}{E_0} = \frac{3.88 \cdot 10^{26} \cdot 1}{4.16 \cdot 10^{-12}} = 9.33 \cdot 10^{37}$$

Ответ. Потеря массы составит - $\Delta m = 6.84 \cdot 10^{-14} M_{\odot}$, а количество реакций в секунду $N = 9.33 \cdot 10^{37}$

Критерии оценивания.**16**

Перевод единиц эВ - Дж	2
Расчет через полную энергию	2
Определение потери массы	4
Определение энергетического выхода одной реакции	4
Определение числа реакций	4

6. Титан

16 баллов

Титенский А. И.

Ряд учёных выдвинули гипотезу о том, что на Титане, кроме атмосферы с давлением в полтора раза большим земного, существует глобальный подповерхностный океан. Мощное приливное действие Сатурна может привести к разогреву Титана и поддержанию достаточно высокой температуры для существования жидкой воды. На основании гравитационной карты, построенным по данным аппарата «Кассини», ученые предположили, что жидкость в подповерхностном океане Титана отличается повышенной плотностью и экстремальной солёностью, похожей на воду Мертвого моря, плотность которой 1.24 кг/л. Толщина водяного слоя оценивается в 100 км, а толщина ледяной корки из пресного льда 50 км. Определить давление массы воды и льда на дно океана Титана. Вещество считать несжимаемым. 1 Атмосфера имеет давление 101 кПа.

Решение. Т.к. толщина водного слоя $h_v = 100$ км и толщина льда $h_l = 50$ км заметны по сравнению с радиусом Титана $R_T = 2575$ км, это нужно учитывать при расчете ускорения свободного падения, т.к. гравитационное воздействие оказывают только нижележащие слои небесного тела.

Для расчета давления атмосферы ускорение свободного падения на Титане рассчитывается при $R_T = 2575$ км:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} = G \frac{1.35 \cdot 10^{23}}{(2575 \cdot 10^3)^2} = 1.352 \text{ м/с}^2$$

Для расчета давления водо-ледяного слоя g радиус надо рассчитывать от центра до дна океана, что составляет $R_0 = 2425$ км. В этом случае g для дна будет составлять 0,887 от g_T на поверхности:

$$g_D = 1.2 \text{ м/с}^2$$

Давление на дно составит

$$p = \rho_v g_D h_v + \rho_l g_T h_l + p_A$$

$$p = 1240 \cdot 1.2 \cdot 10^5 + 900 \cdot 1.352 \cdot 5 \cdot 10^4 + 152 \cdot 10^3 = 148.8 \cdot 10^6 + 54 \cdot 10^6 + 152 \cdot 10^3 = 209.8 \text{ МПа}$$

$$p = 209.8 \text{ МПа} \approx 2098 \text{ Атм}$$

Ответ. Давление на дно составит $p = 209.8 \text{ МПа} \approx 2098 \text{ Атм}$

Критерии оценивания.

16

Учет различного ускорения свободного падения на поверхности и на дне океана 4

Расчет давления на океан ледяной коркой 4

Расчет давление на дно 6

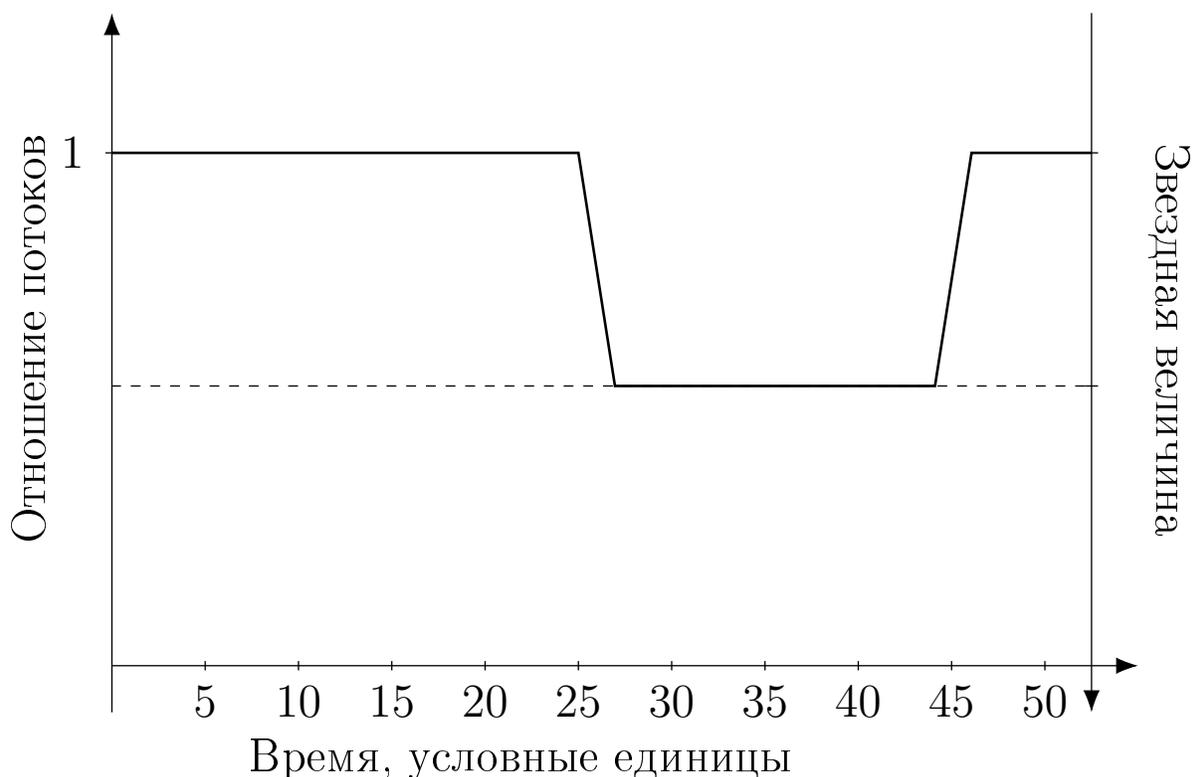
Учет атмосферного давления 2

7. Транзит горячего Юпитера

20 баллов

Игнатьев В. Б

Перед вами кривая блеска звезды аналогичной Солнцу, вокруг которой вращается горячий Юпитер с периодом 10 дней. Определите масштабы обеих осей графика. Определите, возможно ли обнаружить эту планету методом лучевых скоростей со спектрографом с разрешением 10^4 . Расстояние до звезды 20 пк.



Построение и измерения можно проводить прямо на условии задачи. Лист с условием обязательно сдайте вместе с решениями. Масса и радиус горячего Юпитера взять равным радиусу Юпитера.

Решение.

На графике изображена кривая блеска звезды, на которой можно заметить падение блеска звезды. Оно происходит из-за транзита планеты по диску звезды.

По формуле Погсона определим отношение освещенности звезды в момент транзита и освещенности от звезды без транзита экзопланеты:

$$\frac{E}{E_{Star}} = 10^{-0.4\Delta m}$$

Из данных по отношению радиусов экзопланеты и звезды можно определить отношение потоков и падение блеска звезды. Так как при транзите для на-

блюдателя часть звезды закрывается диском планеты. Выразим освещенность звезды про транзите:

$$E = E_{Star} \cdot \frac{S_{Star} - S}{S_{Star}} = E_{Star} \cdot \frac{\pi R_{Star}^2 - \pi R^2}{\pi R_{Star}^2} = E_{Star} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{R_{Star}^2}\right)$$

Подставляя известные величины

$$\frac{E}{E_s} = \left(1 - \frac{R^2}{R_{Star}^2}\right) = \left(1 - \frac{72000^2}{700000^2}\right) = 0.989$$

А падение блеска звезды составит

$$\Delta m = -2.5 \log \frac{E}{E_s} = 0.012^m$$

Звездная величина звезды вне транзита экзопланеты нам пока также не известна, но ее можно определить

$$M - m = 5 - 5 \log r$$

Отсюда

$$m = M - 5 + 5 \log r$$

Подставляя известные выражения

$$m = 4.8 - 5 + 5 \log 20 = 6.3^m$$

Таким образом, масштаб по вертикальным осям:

А. Поток. Вне транзита 1, при транзите экзопланеты 0.989

В. Звездная величина. Вне транзита 6.3^m , при транзите 6.312^m

Теперь определим масштаб по оси времени. С графика можно снять два характерных значения времени – t_1 и t_2 . Рисунок 1 позволяет понять смысл этих времен:

- t_1 – это время, за которое планета заходит на диск звезды. За это время она сдвигается относительно звезды на расстояние D – диаметр планеты. Оно начинается с момента первого касания дисков (в терминологии затмений – первый контакт) и заканчивается моментом, когда планета полностью зашла на диск звезды (второй контакт).

- t_2 – это время, за которое планета проходит по диску звезды. Или время между вторым и третьим контактом.

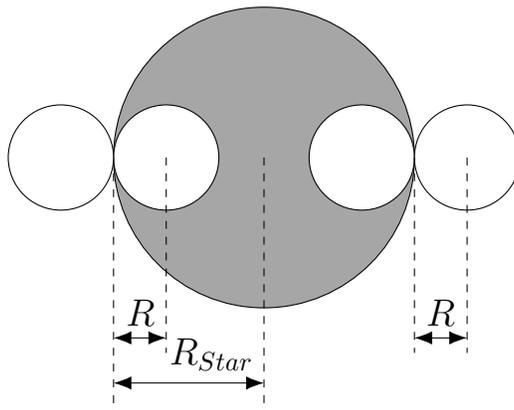


Рис. 1: Схема покрытия

Снимем значения t_2 с графика. В момент, когда весь диск планеты зашел на диск звезды – 27 условных единиц. Момент начала выхода - 44 условных единицы.

Выразим скорость планеты через большую полуось и время t_2 . Здесь предполагаем, что траекторию планеты можно считать прямой. Для очень близких планет иногда разумно считать, что планета движется по дуге.

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}} = \frac{2(R_{Star} - R)}{t_2}$$

$$t_2 = \frac{2(R_{Star} - R_{pl})}{v_2}$$

Определим значение скорости планеты v_2 . По условию задачи известно, что период обращения планеты 10 дней, а масса звезды равна одной массе Солнца. Если мы сначала выразим полуось орбиты планеты, то потом сможем найти и значение скорости.

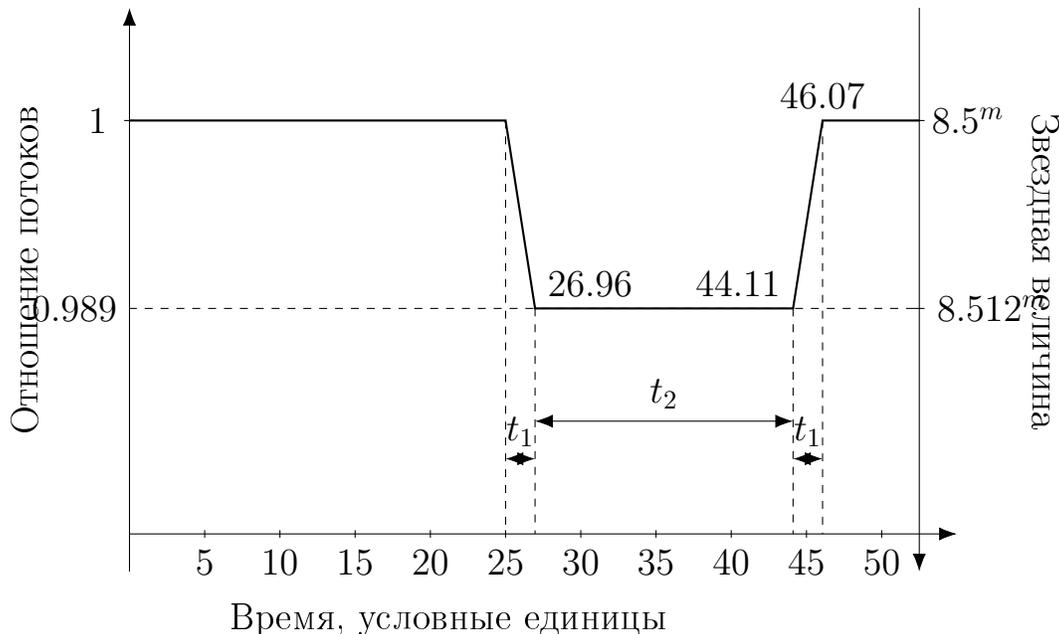
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM}$$

Получаем $a = 0.09$ а.е. Тогда скорость планеты

$$v_2 = \frac{2\pi a}{T} = 98.1 \text{ км/с}$$

Тогда

$$t_2 = \frac{2(R_{Star} - R_{pl})}{v_2} = \frac{2(700000 \text{ км} - 72000 \text{ км})}{98.1 \text{ км/с}} = 12\,800 \text{ сек}$$



Таким образом, в $44 - 27 = 17$ условных единиц поместилось 12 800 секунд. Тогда одна условная единица времени составляет 753 секунды.

Ответим на последний вопрос задачи. Спектральное разрешение спектрографа $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^4$. Давайте разберемся, что такое $\Delta\lambda$ в данной задаче. Горячий Юпитер движется вокруг звезды за 10 дней, но мы не получаем сигнал (фотоны) от горячего Юпитера, а получаем сигнал только от центральной звезды, вокруг которой вращается планета. Если быть более точными, то и планета, и звезда вращаются вокруг центра масс. При этом звезда находится от центра масс на расстоянии r_1 , которое меньше расстояния r_2 (от планеты до центра масс) на величину равное обратному отношению масс.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_{pl}}{M_s}$$

Также, зная отношение расстояний, можно определить отношение скоростей звезды и планеты при их движении вокруг центра масса.

Запишем закон доплера для звезды

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_1}{c}$$

Теперь выразим v_1 через v_2 и отношение масс

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_2 M_{pl}}{c M_s}$$

Левая часть выражения равна обратной величине разрешающей способности спектрографа R . Перепишем выражение для R

$$R = \frac{c M_s}{v_2 M_{pl}}$$

Вычислим правую часть выражения и сравним ее с левой частью и значением 10^4 , которое дано по условию.

$$\frac{c M_s}{v_2 M_{pl}} = \frac{300000 \text{ км/с} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{98 \text{ км/с} \cdot 2 \cdot 10^{27} \text{ кг}} = \frac{3000}{1} \frac{1000}{1} = 3 \cdot 10^6$$

Таким образом, чтобы обнаружить, что звезда вращается вокруг центра масс из-за того, что вокруг нее вращается горячий юпитер с периодом 10 дней, нужна разрешающая способность спектрографа $3 \cdot 10^6$. А со спектрографом с разрешающей способностью 10^4 обнаружить планету в этой звездной системе не удастся.

Ответ. Падение потока – 0.989, падение блеска 0.012, видимая звездная величина 6.3^m , масштаб по оси времени 753 секунды в условной единице времени, данного разрешения спектрографа для обнаружения планеты недостаточно

Критерии оценивания.

20

Формула Погсона для освещенности во время транзита/вне транзита.....	2
Определение падения потока или относительный поток.....	2
Определение падения блеска при транзите.....	2
Определение видимой звездной величины вне транзита.....	2
Снятие данных для времен t_2 или t_1 в условных единицах.....	2
Выражение для диапазона времени t_2 или t_1	2
Определение масштаба по оси времени.....	2
Записанная формула для спектрального разрешения спектрографа.....	2
Запись зависимости между скоростями планеты и звезды.....	2
Ответ, что спектрального разрешения недостаточно.....	2