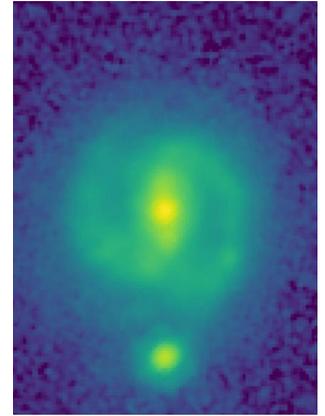


11 класс (варианты решения)

Задание 1. В последнее время опубликован ряд статей об обнаружении международной командой астрономов галактик, существовавших в ранней Вселенной, сходных с нашей Галактикой. Открытия сделаны благодаря помощи телескопа Джеймса Уэбба. Пусть одна из них имеет абсолютную звездную величину -20^m , а, согласно измерениям, её красное смещение составляет 0,1. Определите, какова её видимая звездная величина и можно ли обнаружить эту галактику невооруженным глазом. При решении примите величину постоянной Хаббла, равной $68 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$, а также не учитывайте межгалактическое поглощение света.



Возможное решение задания. Определим скорость удаления галактики, используя эффект Доплера: $V_r = cz$. Тогда, согласно закону Хаббла, $V_r = HR$. Отсюда расстояние до галактики $= \frac{cz}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.1}{68} \approx 441$ Мпк. Так как галактика удалена от нас, то её можно рассматривать для земного наблюдателя как точечный объект. Освещенность, создаваемая точечным источником, обратно пропорциональна расстоянию от источника до наблюдателя: $E \sim \frac{1}{R^2}$. Тогда $\frac{E_{10 \text{ пк}}}{E_{R \text{ Мпк}}} = \frac{\frac{L_{MW}}{10^2}}{\frac{L_{MW}}{(4.41 \cdot 10^6)^2}} = 10^{-0.4(M_{MW} - m_{mw})}$ или

$$\frac{\frac{1}{10^2}}{(4.41 \cdot 10^6)^2} = 10^{-0.4(M_{MW} - m_{mw})}; \quad 1.94 \cdot 10^{11} = 10^{-0.4(M_{MW} - m_{mw})}. \text{ Прологарифмируем}$$

выражение: $\lg(1.94 \cdot 10^{11}) = -0.4(M_{MW} - m_{mw})$, откуда $2.5 \cdot \lg(1.94 \cdot 10^{11}) = M_{MW} - m_{mw}$. Определим видимую звездную величину: $m_{mw} = M_{MW} + 2.5 \cdot \lg(1.94 \cdot 10^{11}) = -20^m + 28.2^m = 8.2^m$. Так как предельное значение видимой звездной величины не превышает $6,5^m$, невооруженным глазом наблюдать данную галактику невозможно.

Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
1 балл	Использовано соотношение для величины красного смещения
1 балл	Записан и использован закон Хаббла
1 балл	Использовано соотношение между освещенностью и расстоянием до точечного объекта
2 балла	Найдено отношение квадратов расстояния до галактик для земного наблюдателя и с расстояния в 10 пк
2 балла	Использована формула Погсона
1 балл	Сделан верный вывод о невозможности наблюдения галактики

Задание 2. Венера 22 января 2023 года вступила в небе Земли в тесное соединение с Сатурном. Определите, в какой день 2023 года Сатурн при наблюдении с Земли вступит в противостояние с Солнцем. Орбиты всех планет считать круговыми. Примите в условии задачи, что Венера в момент тесного соединения обгоняет Землю в своем орбитальном движении ровно на 90° . Изобразите графически положение Земли, Венеры и Сатурна в момент соединения.

Возможное решение задания. Изобразим положение трех планет в момент соединения Венеры и Сатурна в небе Земли. Венера обгоняет Землю в своем орбитальном движении на 90° . Венера при этом не находится в наибольшей элонгации. Угловое расстояние Венеры и Сатурна от Солнца в небе Земли 22

января равно: $\alpha = \arctan \frac{r_V}{r} = 35.9^\circ$. Здесь r и r_V – радиусы орбит Земли и Венеры. Найдем расстояние от Земли до Сатурна D в этот момент. Выполним геометрические построения, проведя перпендикуляр от Солнца на линию «Земля-Сатурн» и обозначив его l . Расстояние составит $D = \sqrt{r^2 - l^2} + \sqrt{R^2 - l^2} = r \cos \alpha + \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \approx r \cos \alpha + R$, где R – радиус орбиты Сатурна. Расстояние до Сатурна получается равным $10,33$ а.е. Найдем разность гелиоцентрических долгот Сатурна и Земли γ , выполнив геометрические построения: проведем перпендикуляр от Сатурна к продолжению линии «Земля-Солнце» и обозначим его длину как h . Учтем, что угол γ больше 90° , тогда $\gamma = 180^\circ - \arcsin \frac{h}{R} = 180^\circ - \arcsin \frac{D \sin \alpha}{R} = 180^\circ - \arcsin \left(\sin \alpha + \frac{r}{R} \cos \alpha \sin \alpha \right) = 140.6^\circ$.

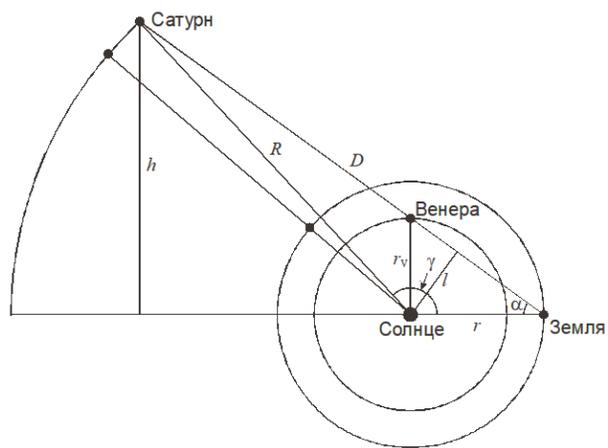
Следовательно, Земля отстает от Сатурна в своем движении на этот угол. Учитывая, что Земля обгоняет Сатурн на целый оборот за синодический период Сатурна S , с учетом круговых орбит определим, через сколько времени Земля догонит Сатурн в орбитальном движении:

$$T = S \frac{\gamma}{360^\circ} = 148 \text{ сут.}$$

Следовательно, ближайшее противостояние Сатурна наступит 16 июня 2023 года. Примечание для жюри: задачу можно решить приближенно, считая Сатурн очень далекой неподвижной планетой. В этом случае угол γ можно определить как $180^\circ - \alpha = 144,1^\circ$, а синодический период Сатурна S равен земному году. Тогда мы получаем, что противостояние произойдет через 146 дней. В этом случае решение также можно принять как верное.

Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
2 балла	Верно выполнен рисунок для момента соединения
2 балла	Верно записано соотношение для расстояния от Земли до Сатурна для момента соединения
2 балла	Верно записана разность гелиоцентрических долгот Сатурна и Земли
1 балл	Записано соотношение для времени движения Земли
1 балл	Получена верная дата противостояния



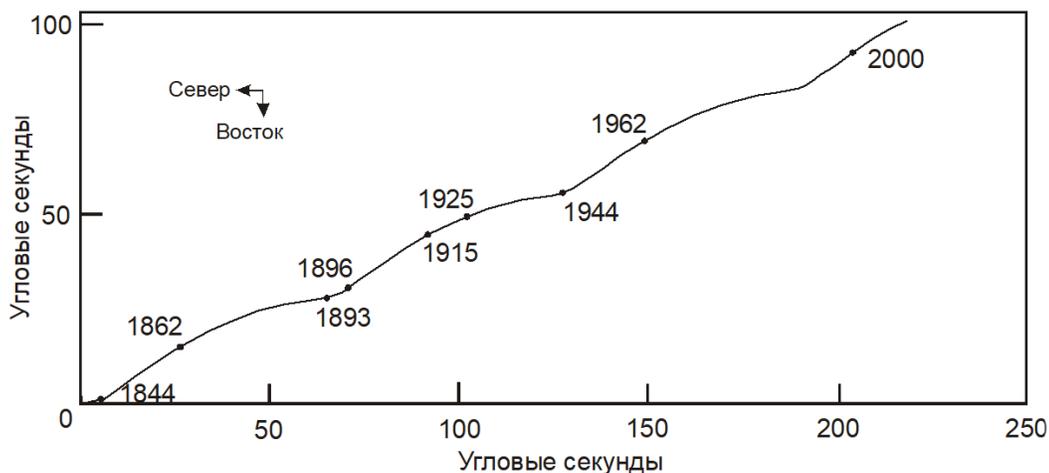
Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
2 балла	Верно выполнен рисунок для момента соединения
2 балла	Верно записано соотношение для расстояния от Земли до Сатурна для момента соединения
2 балла	Верно записана разность гелиоцентрических долгот Сатурна и Земли
1 балл	Записано соотношение для времени движения Земли
1 балл	Получена верная дата противостояния

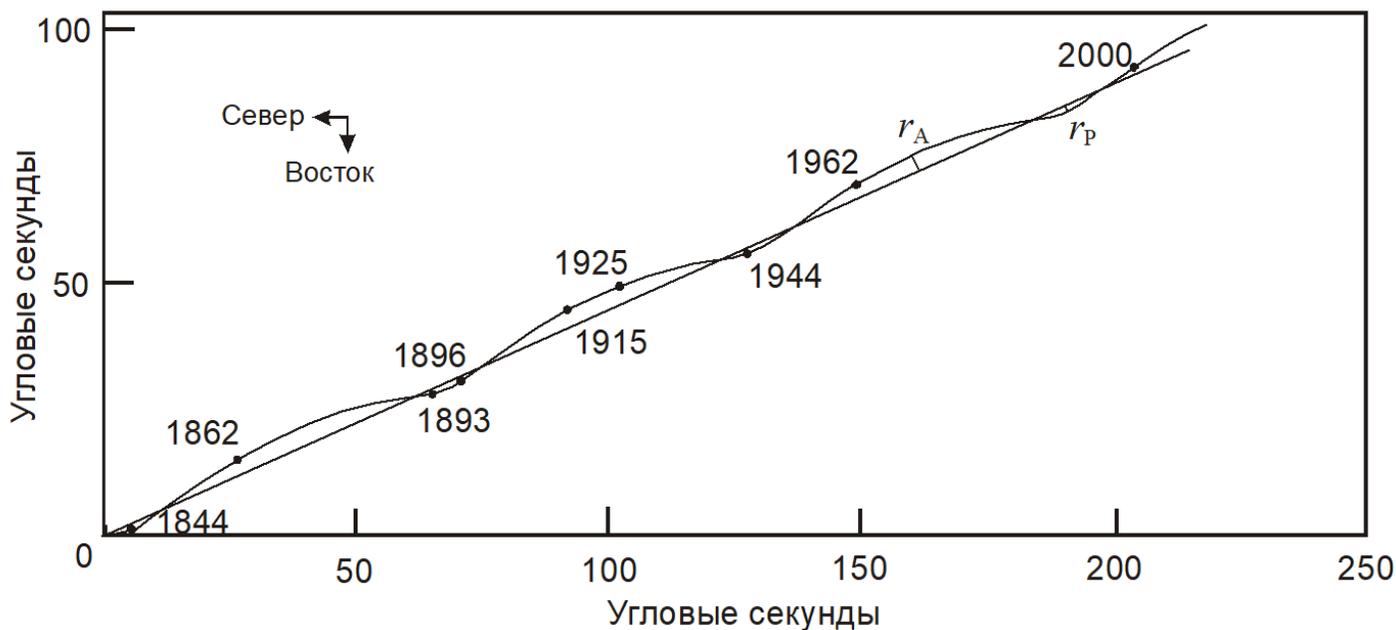
Задание 3. Сириус — ярчайшая звезда ночного неба, светимость которой в 25 раз превышает светимость Солнца, а масса превышает нашу звезду лишь в 2 раза. Это одна из самых близких к нам звезд — расстояние до нее около 8,6 св. года. На фотографии, полученной телескопом «Хаббл», представлено две звезды. Вторую невидимую компоненту обнаружили лишь в 1862 году. Поэтому видимую звезду называют Сириус А, а звезду-компаньон белый карлик — Сириус В. На графике показано перемещение Сириуса А



среди далеких звезд с момента начала наблюдений. При этом вычтены годовые параллактические колебания. Именно на графике хорошо заметен эффект наличия Сириуса В. Оцените массу этого спутника, считая её существенно меньшей массы Сириуса А, а орбиту — лежащей в плоскости рисунка.



Возможное решение задания. Траектория Сириуса А отличается от прямой линии из-за того, что звезда вращается вместе с Сириусом В вокруг общего центра масс. По графику можно найти период этого вращения $T \approx 50$ лет. По условию вращение происходит в плоскости рисунка, как видно, по эллипсу. Скорость движения звезды по своей траектории примерно постоянна, для упрощения можно предположить, что линия апсид, соединяющая точки перигея и апогея, перпендикулярна собственному движению Сириуса А. Проведем на графике прямую линию, соответствующую движению центра масс системы. Тогда можно отметить перигеическое (r_p) и апоцентрическое (r_A) расстояния Сириуса А.



Большая полуось Сириуса А составляет $A = (r_p + r_A)/2$. Расстояние до Сириуса А составляет 8,6 св. года: $3,26 \approx 2,64$ пк. Поэтому одна угловая секунда в плоскости рисунка соответствует расстоянию в 2,64 а.е. По рисунку большая полуось составляет $2,5''$, что соответствует 6,6 а.е. на расстоянии Сириуса А. Из определения центра масс

$AM = am$, тогда среднее расстояние между компонентами системы $a_0 = a + A = \frac{A(M+m)}{m}$.

По третьему закону Кеплера $a_0^3 = \frac{G(M+m)T^3}{4\pi^2} = \frac{A^3(M+m)^3}{m^3}$. Отсюда найдем массу спутника:

$m = A^3 \sqrt[3]{\frac{1}{G} \left(\frac{2\pi(M+m)}{T}\right)^2} \approx A^3 \sqrt[3]{\frac{1}{G} \left(\frac{2\pi M}{T}\right)^2} \approx 1,5 \cdot 10^{30} \text{ кг}$. Примечание для жюри: результат будет варьироваться в зависимости от измерения большой полуоси орбиты Сириуса А по рисунку. Допустимы отклонения до 50 % от приведенного значения.

Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
1 балл	Определена по рисунку большая полуось Сириуса А
1 балл	Определена величина большой полуоси в угловых секундах
2 балла	Определена величина большой полуоси в а.е.
1 балл	Определен по рисунку орбитальный период Сириуса А
1 балл	Использован третий закон Кеплера
1 балл	Получено соотношение для массы Сириуса В
1 балл	Получено числовое значение массы Сириуса В

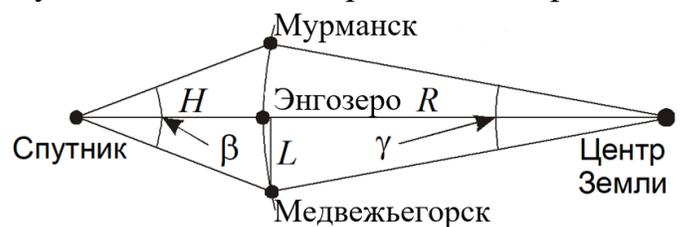
Задание 4. В определенный момент времени искусственный спутник Земли с круговой орбитой оказался над удивительно красивым Энгозером, расположенным в Карелии, посередине между Мурманском и Медвежьегорском. Угловое расстояние между двумя городами при наблюдении со спутника было равно 10° . Определите орбитальный период спутника. Расстояние между Мурманском и Медвежьегорском составляет около 673 км по прямой. Выполните рисунок, геометрически поясняющий ваше решение.



Возможное решение задания. Выполним рисунок, поясняющий решение. Определим высоту спутника над поверхностью Земли H . Будем считать угол β , под которым со спутника видно расстояние S (Мурманск — Медвежьегорск), малым ($10^\circ = 0,17544$ рад):

$$H = \frac{S}{\beta} = \frac{673 \text{ км}}{0,17544 \text{ рад}} = 3836 \text{ км.}$$

Запишем



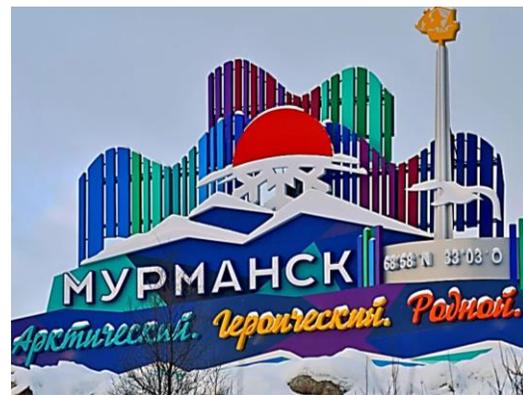
соотношение для орбитального периода спутника: $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM}}$. Орбитальный

период получается равным 10280 с или около 2,86 часа.

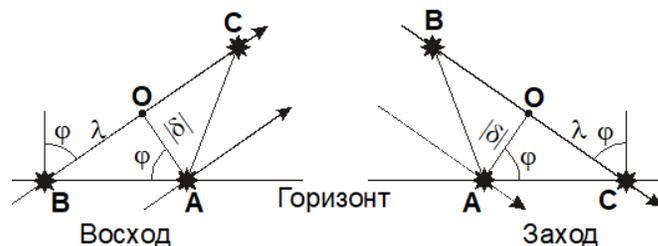
Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
2 балла	Определена высота спутника над поверхностью Земли
2 балла	Использован метод малых углов
2 балла	Записано соотношение для определения орбитального периода
2 балла	Получен верный числовой ответ для величины периода

Задание 5. На широте Мурманска звезда A со склонением -2° вошла одновременно со звездой B , а зашла одновременно со звездой C . Выполните геометрические пояснения к решению задачи, указав расположение звезд при восходе и заходе звезды A . Определите (в часовой мере), чему равна разность прямых восхождений звезд B и C , если они находятся на небесном экваторе. В условиях задачи рефракцией можно пренебречь.



Возможное решение задания. Изобразим конфигурацию звезд во время восхода и захода звезды A . Угловые расстояния между звездами малы, поэтому картину можно считать плоской. Обозначим точку O — точку небесного экватора, имеющую то же прямое восхождение, что и звезда A . Тогда точка O и звезда A лежат на одном круге склонения. Отрезок OA перпендикулярен проекции небесного экватора на плоскость листа, содержащей саму точку O и звезды B и C . Длина отрезка OA равна модулю склонения звезды A , $|\delta|$. Из рисунка видно, что при восходе и заходе этот отрезок образует с горизонтом угол, равный широте места наблюдения φ . Тогда $\alpha = OB = OC = |\delta| \operatorname{tg} \varphi$; $BC = 2\alpha = 2 |\delta| \operatorname{tg} \varphi = 10,4^\circ$. Переводя эту величину в часовую меру, в которой обычно выражается прямое восхождение, получаем 41,6 минуты. Звезда B восходит и заходит позже звезды C , и ее прямое восхождение на 41,6 минуты больше, чем у звезды C .

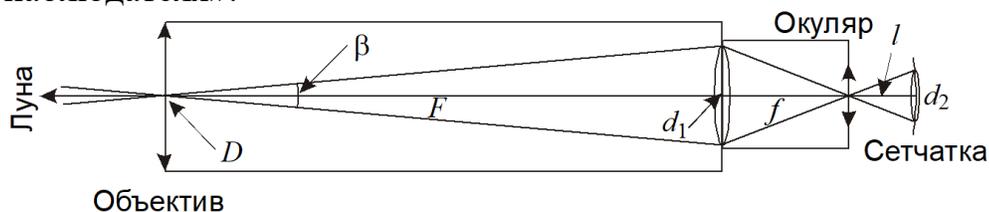


Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
2 балла	Верно выполнен рисунок взаимного расположения звезд при восходе звезды A
2 балла	Верно выполнен рисунок взаимного расположения звезд при заходе звезды A
2 балла	Верно записано геометрическое соотношение для BC как разности прямых восхождений
2 балла	Получено верное числовое значение в часовой мере для разности прямых восхождений

Задание 6. Полная Луна наблюдается в два телескопа с одинаковыми окулярами с фокусным расстоянием 2,5 см. Объектив первого телескопа имеет диаметр 5 см и фокусное расстояние 1 метр. Второй телескоп имеет объектив диаметром 50 см с фокусным расстоянием 5 метров. Центр диска Луны совпадает с центром поля зрения. Сравните освещенность центральной части глаза наблюдателя в обоих случаях. Выполните рисунок, поясняющий ход лучей, падающих на сетчатку глаза наблюдателя в системе «телескоп — глаз наблюдателя».

Возможное решение задания. Изобразим оптическую схему системы «телескоп — глаз наблюдателя»:



D – диаметр объектива.

На объектив в единицу времени падает световая энергия от Луны в количестве $J = I_0 \frac{\pi D^2}{4}$, где I_0 – поток энергии от полной Луны на Земле. Захваченное объективом излучение передается на фокальную плоскость, в которой получается изображение диска Луны диаметром $d_1 = \beta F$, где β – угловой диаметр Луны, а F – фокусное расстояние объектива. Освещенность в центре изображения составляет $S_1 = \frac{4J}{\pi d_1^2} = 4I_0 \frac{D^2}{\beta^2 F^2}$. После этого свет проходит систему из окуляра с фокусным расстоянием f и глаза с фокусным расстоянием l . Чтобы весь свет попал в глаз, диаметр выходного пучка δ не должен превышать диаметр зрачка глаза, равный 6 мм, откуда диаметр выходного пучка $\delta = D \frac{f}{F}$. Для двух рассматриваемых телескопов диаметр выходного пучка получается равным соответственно 1,25 и 2,5 мм. В этом случае на сетчатке формируется еще одно изображение диска Луны с размером $d_2 = \frac{d_1 l}{f} = \frac{\beta F l}{f}$ и освещенностью в центре $S_2 = \frac{4J}{\pi d_2^2} = 4I_0 \frac{D^2 f^2}{\beta^2 F^2 l^2}$. Так как в задаче спрашивается о центре поля зрения, данная величина не зависит от величины поля зрения окуляра. Отношение величин освещенности сетчатки для первого и второго телескопов составит $\frac{S_{21}}{S_{22}} = \frac{D_1^2 F_2^2}{D_2^2 F_1^2} = \frac{1}{4}$. Таким образом, освещенность при использовании второго телескопа будет вчетверо больше, чем при использовании первого телескопа.

Система оценивания задания:

Баллы	Критерии оценивания
2 балла	Верно выполнен рисунок хода лучей в оптической системе
2 балла	Записано соотношение для пропорциональности освещенности в центре изображения Луны в фокальной плоскости квадрату отношения диаметра и фокусного расстояния объектива
2 балла	Доказано, что при использовании указанного окуляра выходной пучок уже зрачка глаза
2 балла	Записано соотношение для освещенности в центре изображения Луны на сетчатке, пропорциональной квадрату отношения диаметра и фокусного расстояния
2 балла	Получено верное отношение для величин освещенности для двух телескопов

Справочные данные

Среднее расстояние от Земли до Солнца	1 а.е. = 150 млн. км
Среднее расстояние от Марса до Солнца	1,52 а.е.
Эксцентриситет Меркурия	0,2056
Большая полуось Меркурия	0,3871 а.е.
Большая полуось Сатурна	9,5388 а.е.
Большая полуось Венеры	0,7233 а.е.
Диаметр Солнца	$1,39 \cdot 10^6$ км
Диаметр Меркурия	4879,4 км
Масса Солнца	$2 \cdot 10^{30}$ кг
Масса Земли	$6 \cdot 10^{24}$ кг
Средний радиус Земли	6400 км
Гравитационная постоянная	$6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$