Районный этап всероссийской олимпиады школьников по астрономии в 2023/2024 учебном году в Санкт-Петербурге

11 класс, критерии оценивания

1. В одной далекой системе по круговым орбитам вокруг звезды обращаются две планеты. Орбитальная скорость первой планеты равна 20 км/с, а период обращения равен 3 земным годам. Вторая планета обращается со скоростью 15 км/с. Определите период обращения второй планеты и массу центральной звезды.

Решение:

Поскольку планета движется по круговой орбите, мы можем связать радиус орбиты, период обращения и скорость объекта:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{vT}{2\pi}.$$

Подставляя данные для первой планеты, получаем

$$r_1 = \frac{20\,\text{км/с} \cdot 3 \cdot 365.25 \cdot 86400\,\text{с}}{2\pi} = 3 \cdot 10^8\,\text{км} = 2\,\text{а.е.}$$

Тогда массу звезды мы можем определить по третьему закону Кеплера в системе единиц «масса Солнца — а.е. — год» для первой планеты:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1}{M} \Rightarrow M = \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{2^3}{3^2} \approx 0.9M_\odot.$$

Линейная скорость движения по круговой орбите (в одной планетной системе) обратно пропорциональна корню из радиуса этой орбиты: $v \propto r^{-1/2}$, и тогда верно $r \propto v^{-2}$. Поэтому угловая скорость обращения пропорциональна $\omega = v/r \propto v^3$. Воспользовавшись тем, что угловая скорость обратно пропорциональна периоду, получаем, что $T \propto 1/\omega \propto v^{-3}$.

Таким образом, период обращения второй планеты больше периода обращения первой в $(20/15)^3 \approx 2.37$ раза, а это означает, что $T_2 \approx 7$ лет.

Комментарии к оцениванию:

Определение массы центральной звезды — 4 балла. Определение периода обращения второй планеты — 4 балла. Оба этапа могут быть выполнены и с использованием III закона Кеплера, и путем решения задачи о движении по окружности под действием постоянного ускорения.

2. Вездеход движется вдоль меридиана на север из пункта с координатами 30° с.ш., 60° в.д. со скоростью 40 км/час. Какое событие наступит раньше и спустя какое время после начала движения: Капелла ($\delta = 46°$) станет незаходящей или Шаула ($\delta = -37°$) станет невосходящей?

Решение:

Определим значение широты, для которой Капелла будет незаходящей:

$$|\varphi + \delta| - 90° \geqslant 0°,$$

откуда $\varphi \geqslant 44°$.

Определим значение широты, для которой Шаула будет невосходящей:

$$90^\circ - |\varphi - \delta| \leqslant 0^\circ,$$

откуда $\varphi \geqslant 53^\circ$.

Первой наступит ситуация с незаходящей Капеллой, причем широта вездехода должна измениться на 14°. За один час вездеход проезжает $\frac{40}{4\cdot 10^4} \cdot 360^\circ = 0^\circ.36$, поэтому 14° он проедет за $14/0.36 \approx 39$ часов.

Комментарии к оцениванию:

Запись или вывод формул для склонения незаходящего или невосходящего на данной широте объекта и их использование — по 2 балла за каждое. Ответ на вопрос, какое из событий наступит раньше — 1 балл. Вычисление времени — 3 балла.

3. На расстоянии 1 кпк от Земли наблюдается двойная звезда, состоящая из двух одинаковых компонент, похожих на Солнце. Определите суммарную видимую звёздную величину двойной звезды. Межзвёздным поглощением пренебречь.

Решение:

Воспользуемся оценкой абсолютной звёздной величины Солнца $M = 5^m$. Тогда видимая звёздная величина одной компоненты

$$m_0 = M - 5\ + 5\ \lg r = 15^m.$$

Освещенность, создаваемая двумя компонентами, в 2 раза больше, чем освещенность, создаваемая одной. Поэтому две компоненты в соответствии с формулой Погсона будут ярче одной на $\Delta m = 2.5 \lg 2\ = 0.75 \approx 1^m$. Это означает, что видимая звездная величина двойной системы около $+14^m$.

Комментарии к оцениванию:

Оценка абсолютной звездной величины Солнца — 2 балла. Вычисление видимой звездной величины одного компонента — 3 балла. Вычисление видимой звездной величины системы — 3 балла. Участник может воспользоваться как известным фактом тем, что изменение освещенности в два раза соответствует изменению блеска на $\approx 0^m.75$, в этом случае (при получении правильного результата) баллы за последний этап выставляются полностью.

4. В Китае планируют запустить новый полноповоротный радиотелескоп с диаметром зеркала 110 м (Xinjiang Qitai 110m Radio Telescope), на котором будут вестись наблюдения на частотах от 300 МГц до 117 ГГц. Сможет ли он разрешить отдельную активную область на Солнце размером 14 тысяч км?

Решение:

Оценим угловой размер φ активной области. Угловой диаметр Солнца составляет $30'$, что соответствует линейному диаметру 1.4 млн. км. Линейный размер активной области в 100 раз меньше, значит, и угловой размер меньше во столько же раз: $\beta = 0'.3 = 18''$.

Определим частоту ν, на которой данный угловой размер будет соответствовать предельному разрешению телескопа:

$$\beta \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{c}{\nu D} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{c}{\beta D} = \frac{3 \times 10^8}{18''/206265'' \cdot 110} = 3.1 \times 10^{10}\ \text{Гц} = 31\ \text{ГГц}.$$

Таким образом, область будет разрешаться при наблюдении на полученной частоте или большей. Верхняя граница рабочего диапазона радиотелескопа по частотам выше полученного значения в несколько раз, поэтому разрешение области возможно, более того, можно ожидать, что в подобной активной области будут заметны даже сравнительно более мелкие детали.

Комментарии к оцениванию:

Определение углового размера активной области — 3 балла. Определение предельной частоты, на которой возможно разрешение — 4 балла (допустим и оценивается полным баллом вариант, при котором участник оценивает угловое разрешение, соответствующее двум предельным значениям частот). Итоговый вывод — 1 балл.

5. Период вращения Хаумеа вокруг своей оси самый короткий среди карликовых планет. Она делает полный оборот вокруг своей оси за 3.9 часа. Получите из этих данных ограничения на среднюю плотность Хаумеа, считая карликовую планету шарообразной.

Решение:

Ограничение на плотность можно получить, исходя из того, что объект не должен быть разорван центробежными силами при вращении или, что то же самое, круговая (первая космическая) скорость для него должна превышать линейную скорость движения точек на экваторе. Запишем это условие:

$$\sqrt{\frac{GM}{R}} > \frac{2\pi R}{T}.$$

Возведем неравенство в квадрат и выразим массу M через среднюю плотность и объем. Получим

$$\frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \rho}{R} > \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}.$$

Выражая отсюда плотность, получаем

$$\rho > \frac{3\pi}{GT^2},$$

что при подстановке численных данных дает результат $\rho > 7 \cdot 10^2$ кг/м^3.

Комментарии к оцениванию:

Формулировка критерия ограничения — 3 балла. Участник может предположить, что так как Хаумеа шарообразна, то круговая скорость должна быть не просто больше скорости точек на экваторе, а больше в некоторое число раз (например, в 10), явно указав это в решении. Это приведет к другому (большему) численному ответу, но такое решение оценивается как полностью правильное.

Получение выражения для минимально возможной плотности — 3 балла. Вычисление порогового значения — 2 балла.

При указании в качестве ответа вместо неравенства значения $2.6 \cdot 10^3$ кг/м^3 за всю работу в целом выставляется 0 баллов за списывание.